Estudio Analitico-Grafico de los Poliedros Regulares y de sus Derivados y Conjugados

LAMINAS 1 AL 16

III

III

TA
514
ALV-il
600107500

Prof. T. Alvarez Peralto

UNE A4 210 X 297

R. 7815
i1902504x

Enunciado

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un tetraedro regular de 89,8 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

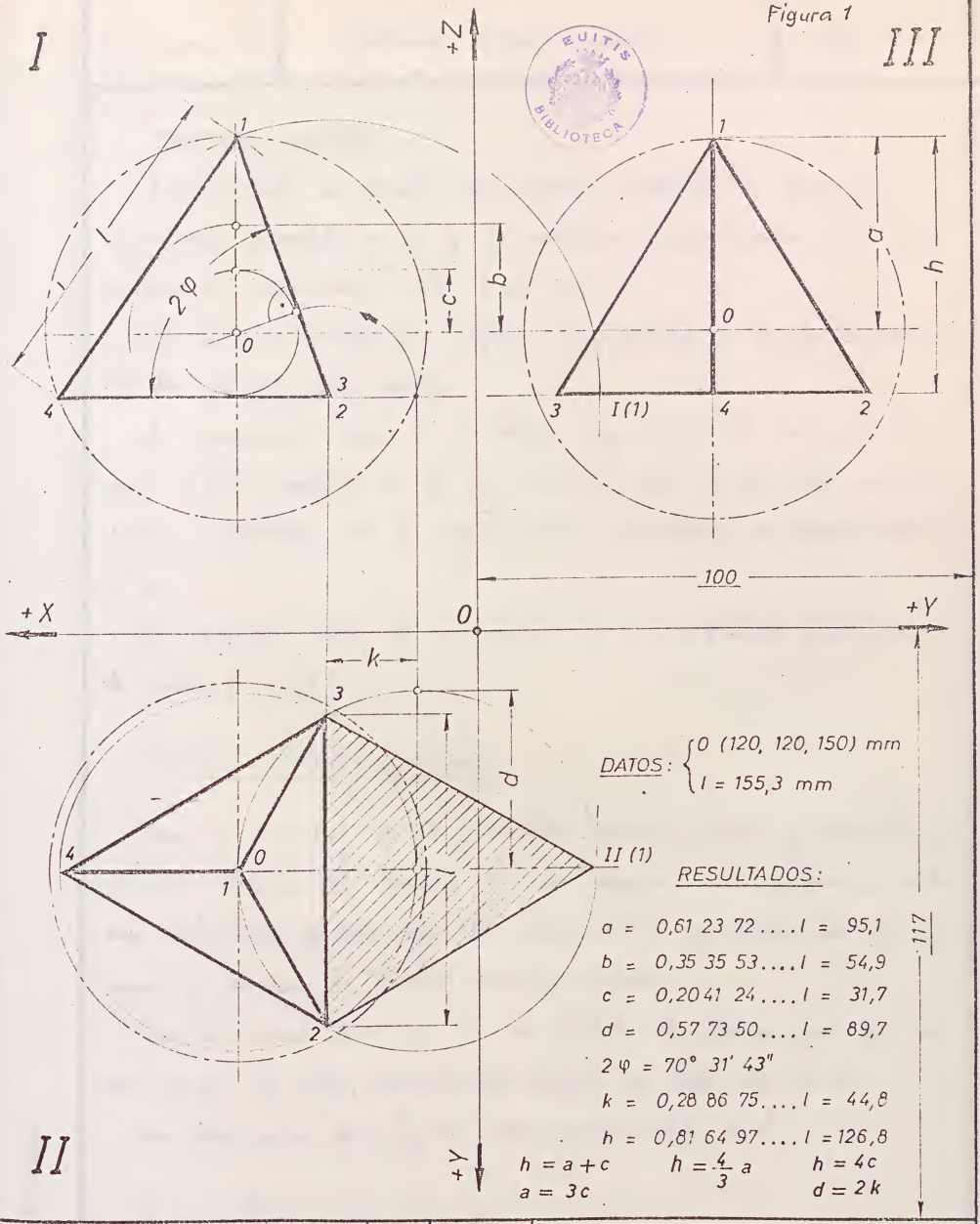
DATOS O (72, 72, 85) mm

$l_4 = 89,8$ mm

A
514
ALV
III

EUITIS BIBLIOTECA

Figura 1



EUITIS BIBLIOTECA

DATOS: $\begin{cases} O\ (120,\ 120,\ 150)\ mm \\ l = 155{,}3\ mm \end{cases}$

RESULTADOS:

$a = 0{,}61\ 23\ 72 \ldots l = 95{,}1$

$b = 0{,}35\ 35\ 53 \ldots l = 54{,}9$

$c = 0{,}20\ 41\ 24 \ldots l = 31{,}7$

$d = 0{,}57\ 73\ 50 \ldots l = 89{,}7$

$2\varphi = 70°\ 31'\ 43''$

$k = 0{,}28\ 86\ 75 \ldots l = 44{,}8$

$h = 0{,}81\ 64\ 97 \ldots l = 126{,}8$

$h = a + c$ $\quad h = \frac{4}{3} a$ $\quad h = 4c$

$a = 3c$ $\quad d = 2k$

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha						Curso
Alumno						

Escala		
1:2,5	Tetraedro regular convexo	Lámina 1
		Curso 19 - 19

PROCESO GRÁFICO

Gráficamente se resuelve este ejercicio situando el tetraedro con una cara paralela a II y la contigua perpendicular a I. Los vértices se numerarán del 1 al 4.

La proyección sobre II (figura 1) es directa y nos da rápidamente las de los cuatro vértices.

La proyección sobre I se obtiene seguidamente colocando la cara 2·3·4 paralela a II y mediante giro de la cara contigua 1·2·3, alrededor de la arista 2·3, se obtiene el cuarto vértice nº 1.

La proyección sobre III se deduce de las obtenidas anteriormente sobre I y II.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reducción de los inevitables errores gráficos, y facilitar al mismo tiempo el trazado, con su continua comprobación, deberán calcularse previamente las magnitudes acotadas en la figura 1, según la tabla correspondiente.

La longitud del lado se ha fijado de forma que el radio a_4 de la esfera circunscrita tenga el valor de 55 mm.

La dimensión de l_4 con seis decimales, será

$$l_4 = \frac{55}{0,61\ 23\ 72..} \cong 89,81\ 46\ 88... \text{ mm.}$$

con cuyo valor, como base de cálculo, obtenemos:

UNE A4 210 X 297

$a_4 = 0,61\ 23\ 72 \times 89,81\ 46\ 88 = 55,0$ mm

$b_4 = 0,35\ 35\ 53 \times$ id $= 31,8$ "

$c_4 = 0,20\ 41\ 24 \times$ id $= 18,3$ "

$d_4 = 0,57\ 73\ 50 \times$ id $= 51,8$ "

$2\varphi_4 = 70° 31' 43,6''$

$k_4 = 0,28\ 86\ 75 \times$ id $= 25,9$ "

$h_4 = 0,81\ 64\ 97 \times$ id $= 73,3$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$h_4 = a_4 + c_4 = 55,0 + 18,3 = 73,3$ mm $\quad h_4 = \frac{4}{3} a_4 = \frac{4}{3} \times 55 = 73,3$ mm

$h_4 = 4 c_4 = 4 \times 18,3 = 73,2$ mm $\quad a = 3c = 3 \times 18,3 = 54,9$ mm

$d_4 = 2 k_4 = 2 \times 25,9 = 51,8$ mm

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 4 triángulos equiláteros de 89.8 mm. de lado (dato del ejercicio).

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

A) Nomenclatura empleada $\quad l_4$ = Lado del tetraedro (dato).

a_4 = Radio de la esfera circunscrita al tetraedro.

b_4 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_4 = Radio de la esfera inscrita

UNE A4 210 X 297

d_4 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

2φ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

k_4 = Apotema del polígono de una cara.

h_4 = Altura del tetraedro.

S_4 = Superficie.

V_4 = Volumen.

CUADRO SINÓPTICO

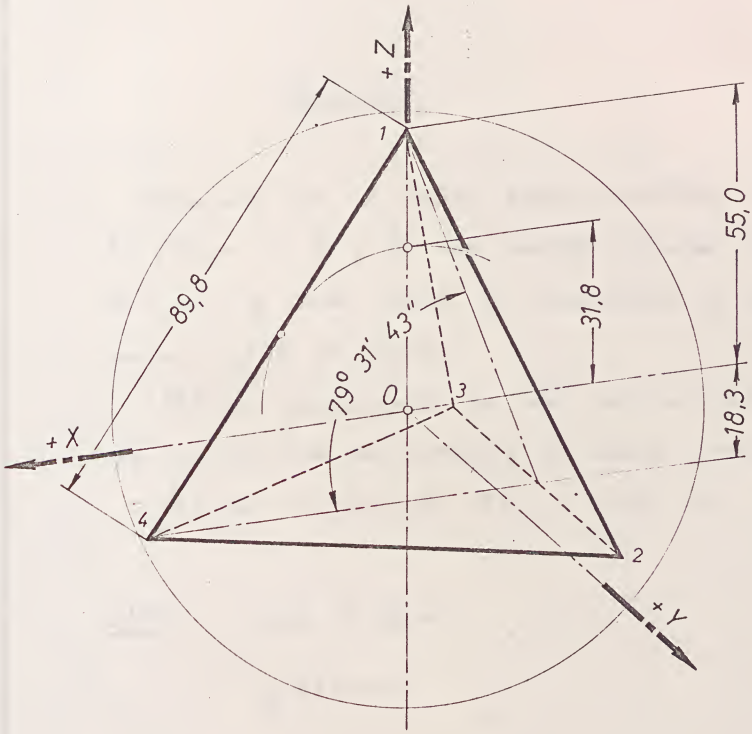
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
a_4	(1) $\frac{\sqrt{6}}{4}\ \ell_4$	$0,61\ 23\ 72 \ldots\ \ell_4$	×
b_4	(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ \ell_4$	$0,35\ 35\ 53 \ldots\ \ell_4$	×
c_4	(3) $\frac{\sqrt{6}}{12}\ \ell_4$	$0,20\ 41\ 24 \ldots\ \ell_4$	×
d_4	(4) $\frac{\sqrt{3}}{3}\ \ell_4$	$0,57\ 73\ 50 \ldots\ \ell_4$	×
2φ	(5) $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen}\varphi = 0,57\ 73\ 50 \ldots$ $2\varphi = 70°\ 31'\ 43,6''$	×
k_4	(6) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ell_4$	$0,28\ 86\ 75 \ldots\ \ell_4$	×
h_4	(7) $\frac{\sqrt{6}}{3}\ \ell_4$	$0,81\ 64\ 97 \ldots\ \ell_4$	×
S_4	(8) $\sqrt{3}\ \ell_4^2$	$1,73\ 20\ 51 \ldots\ \ell_4^2$	×
V_4	(9) $\frac{\sqrt{2}}{12}\ \ell_4^3$	$0,11\ 78\ 51 \ldots\ \ell_4^3$	×

(10) Relaciones entre magnitudes

$h_4 = a_4 + c_4$ $\quad h_4 = \frac{4}{3} a_4$ $\quad h_4 = 4 c_4$

$a_4 = 3 c_4$ $\quad d_4 = 2 k_4$

UNE A4 210 X 297



Tetraedro regular convexo

Lámina 2

Enunciado

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un exaedro regular de 63.5 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

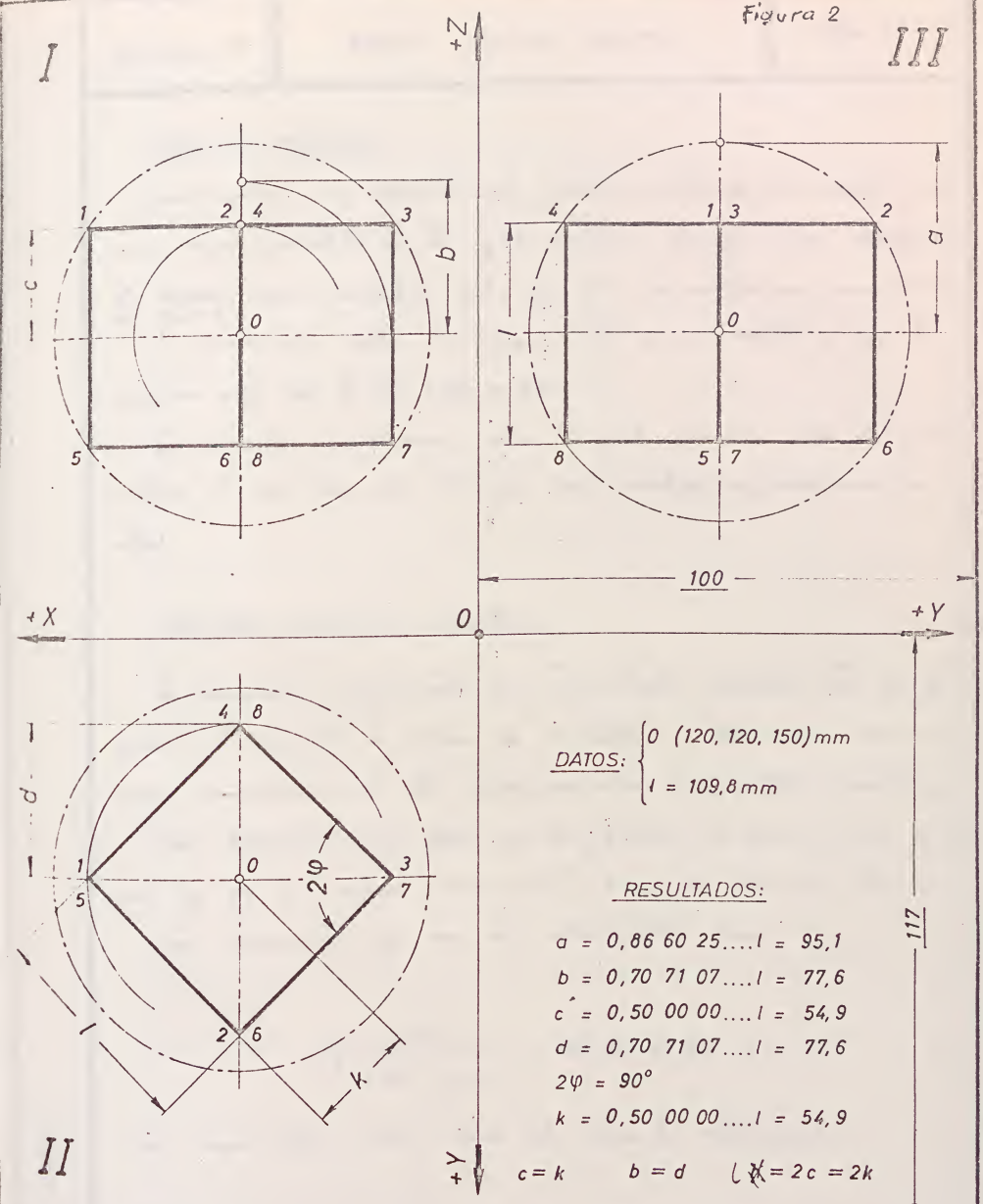
Dibujar en formato A3 V, á escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

$l_6 = 63,5$ mm

UNE A4 210 X 297

Figura 2



DATOS: $\begin{cases} O\ (120, 120, 150)\,mm \\ l = 109{,}8\,mm \end{cases}$

RESULTADOS:

$a = 0{,}86\ 60\ 25 \ldots l = 95{,}1$

$b = 0{,}70\ 71\ 07 \ldots l = 77{,}6$

$c = 0{,}50\ 00\ 00 \ldots l = 54{,}9$

$d = 0{,}70\ 71\ 07 \ldots l = 77{,}6$

$2\varphi = 90^\circ$

$k = 0{,}50\ 00\ 00 \ldots l = 54{,}9$

$c = k \qquad b = d \qquad l = 2c = 2k$

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						

Escala 1:2,5

Exaedro regular convexo

Lámina 2

Curso 19

PROCESO GRÁFICO

Gráficamente se resuelve este ejercicio situando el exaedro con una cara paralela a II, y al mismo tiempo una diagonal de dicha cara paralela al eje + X. Los vértices se numerarán del 1 al 8.

La proyección sobre II (figura 2) es inmediata y nos da rápidamente las de los ocho vértices.

Las sencillas proyecciones sobre I y III, iguales entre sí y de altura l, nos dan las de sus ocho vértices en cada una de ellas.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Se calcularán previamente las magnitudes acotadas en la figura 2, tomando los valores de la tabla. Ellas nos servirán para comprobación de las correspondientes magnitudes gráficas.

La longitud del lado se ha fijado de forma que el radio a_6 de la esfera circunscrita tenga el valor de 55 mm.

La dimensión l_6, con seis decimales, será:

$$l_6 = \frac{55}{0,86\ 60\ 25..} = 63,50\ 85\ 60 \quad mm$$

con cuyo valor, como base de cálculo, obtenemos:

$a_6 = 0,86\ 60\ 25 \times 63,50\ 85\ 60 = 55,0$ mm

$b_6 = 0,70\ 71\ 07 \times$ id. $= 44,9$ "

$c_6 = 0,50\ 00\ 00 \times$ id. $= 31,8$ "

$d_6 = 0,70\ 71\ 07 \times$ id. $= 44,9$ "

$2\varphi_6 = 90°$

$k_6 = 0,50\ 00\ 00 \times$ id $= 31,8$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$c_6 = k_6 = 31,8$ mm $\quad b_6 = d_6 = 44,9$ mm $\quad l_6 = 2c_6 = 2k_6 = 2 \times 31,8 = 63,6$ mm

---

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 6 cuadrados de 63,5 mm. de lado (dato del ejercicio).

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada $\quad l_6$ lado del exaedro (dato)

a_6 = Radio de la esfera circunscrita al exaedro.

b_6 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_6 = Radio de la esfera inscrita

d_6 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara

$2\varphi_6$ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

k_6 = Apotema del polígono de una cara

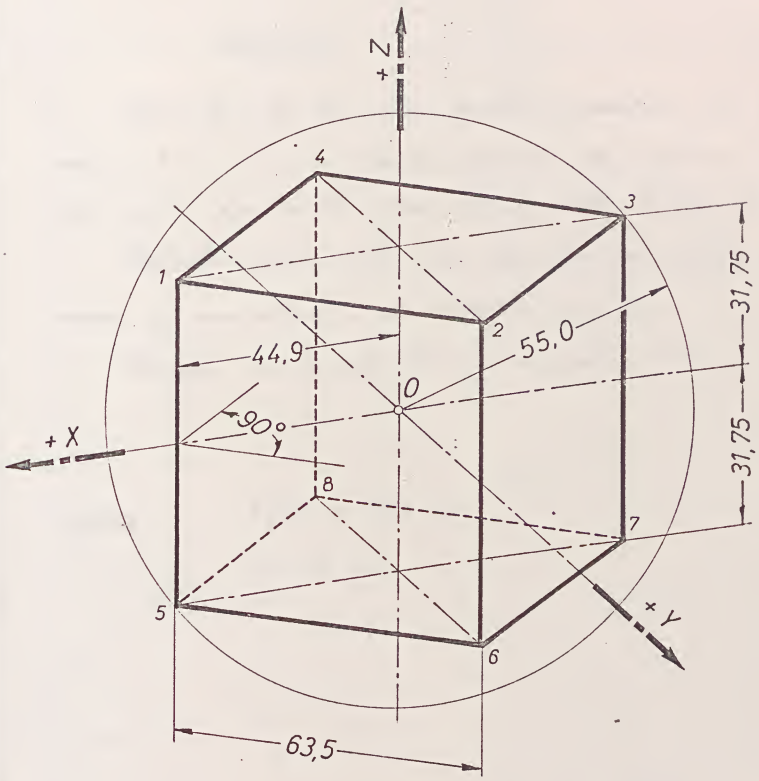
h_6 = Altura del exaedro.

S_6 = Superficie.

V_6 = Volumen.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
a_6	(11) $\frac{\sqrt{3}}{2}\ell_6$	$0.86\ 60\ 25\ldots\ell_6$	×
b_6	(12) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell_6$	$0.70\ 71\ 07\ldots\ell_6$	×
c_6	(13) $\frac{1}{2}\ell_6$	$0.50\ 00\ 00\ldots\ell_6$	×
d_6	(14) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ell_6$	$0.70\ 71\ 07\ldots\ell_6$	×
$2\varphi_6$	(15) $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{sen}\varphi = 0.70\ 71\ 07\ldots$ $2\varphi = 90°$	×
k_6	(16) $\frac{1}{2}\ell_6$	$0.50\ 00\ 00\ldots\ell_6$	×
h_6	(17) $1\ \ell_6$	$1.00\ 00\ 00\ldots\ell_6$	–
S	(18) $6\ \ell_6^2$	$6.00\ 00\ 00\ldots\ell_6^2$	–
V	(19) $1\ \ell_6^3$	$1.00\ 00\ 00\ldots\ell_6^3$	–
(20)	Relaciones entre magnitudes		
$c_6 = k_6$	$b_6 = d_6$	$h_6 = 2c_6$	$h_6 = 2k_6$



Exaedro regular convexo

Lámina 3

Enunciado

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un octaedro regular de 77,8 mm. de lado, siendo las coordenadas de su centro O(72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_8 = 77,8 mm.

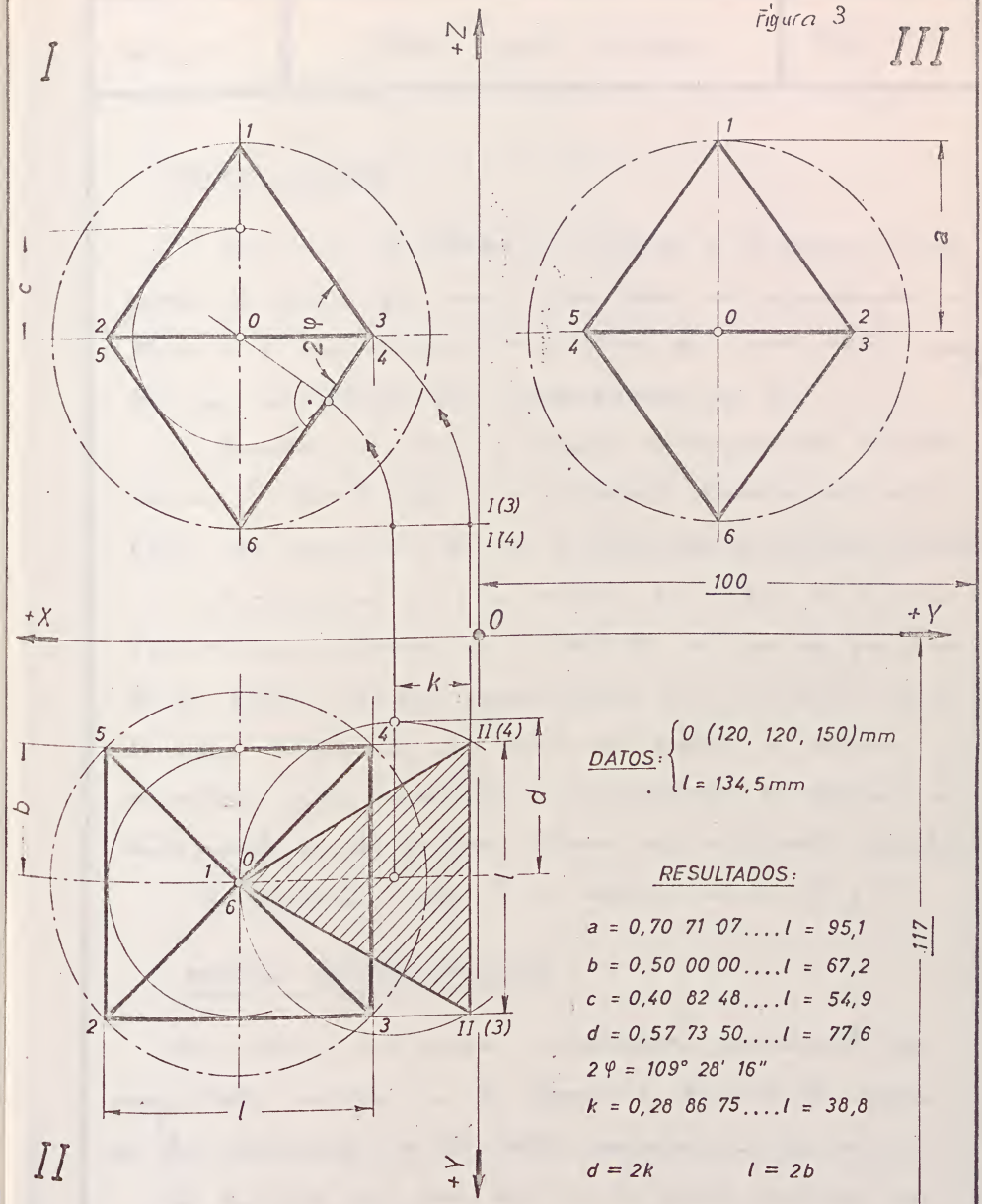
EUITIS BIBLIOTECA

UNE A4 210 X 297

Figura 3

I

III



DATOS: $\begin{cases} 0\ (120,\ 120,\ 150)\,mm \\ l = 134{,}5\,mm \end{cases}$

RESULTADOS:

$a = 0{,}70\ 71\ 07 \ldots . l = 95{,}1$

$b = 0{,}50\ 00\ 00 \ldots . l = 67{,}2$

$c = 0{,}40\ 82\ 48 \ldots . l = 54{,}9$

$d = 0{,}57\ 73\ 50 \ldots . l = 77{,}6$

$2\varphi = 109°\ 28'\ 16''$

$k = 0{,}28\ 86\ 75 \ldots . l = 38{,}8$

$d = 2k \qquad l = 2b$

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:2,5

Octaedro regular convexo

Lámina 3

Curso 19 -19

PROCESO GRÁFICO

Situaremos el octaedro, con respecto a los planos de proyección, de forma que una de sus caras sea perpendicular al plano I y una diagonal del mismo que une vértices opuestos, sea simultáneamente perpendicular a II.

Conociendo el lado, el trazado de la proyección del octaedro en el plano II (fig. 3) es inmediato, dándonos al mismo tiempo las proyecciones de sus 6 vértices, que se numerarán del 1 al 6.

La proyección en I se obtiene por el giro de la cara II (6·3·4), perpendicular a I, alrededor de un eje que pasando por II (6) es también perpendicular a I; el centro I (0) de la esfera circunscrita, así como su radio, se obtienen por el anterior giro, sirviendo de comprobación al obtenido anteriormente en II, ya que deberán ser de igual longitud.

La proyección sobre III se deduce de las I y II.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para utilizar este proceso se calcularán previamente las magnitudes acotadas en la figura 3, tomando los valores de los coeficientes de la tabla incluida en la misma.

La longitud del lado dado se ha fijado partiendo de la base de que el radio a de la esfera circunscrita tenga el valor exacto de 55 mm.

UNE A4 210 X 297

La dimensión de $\underline{l}$, con seis decimales, será:

$$l = \frac{55}{0{,}70\ 71\ 07} = 77{,}78\ 17\ 22 \ldots \text{ mm}$$

con cuyo valor, como base de cálculo obtenemos:

$a = 0{,}70\ 71\ 07 \times 77{,}78\ 17\ 22 = 55{,}0$ mm

$b = 0{,}50\ 00\ 00 \times$ id $= 38{,}9$ "

$c = 0{,}40\ 82\ 48 \times$ id $= 31{,}8$ "

$d = 0{,}57\ 73\ 50 \times$ id $= 44{,}9$ "

$2\varphi = 109^\circ\ 28'\ 16''$

$k = 0{,}28\ 86\ 75 \times$ id $= 22{,}5$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$d = 2k = 2 \times 22{,}5 = 45$ mm $\quad l = 2b = 2 \times 38{,}9 = 77{,}8$ mm

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 8 triángulos equiláteros de 77,8 mm de lado (dato del ejercicio).

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l_8 = Lado del octaedro dado (dato)

a_8 = Radio de la esfera circunscrita al octaedro.

UNE A4 210 X 297

b_8 = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_8 = Radio de la esfera inscrita

d_8 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_8$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas

k_8 = Apotema del polígono de una cara

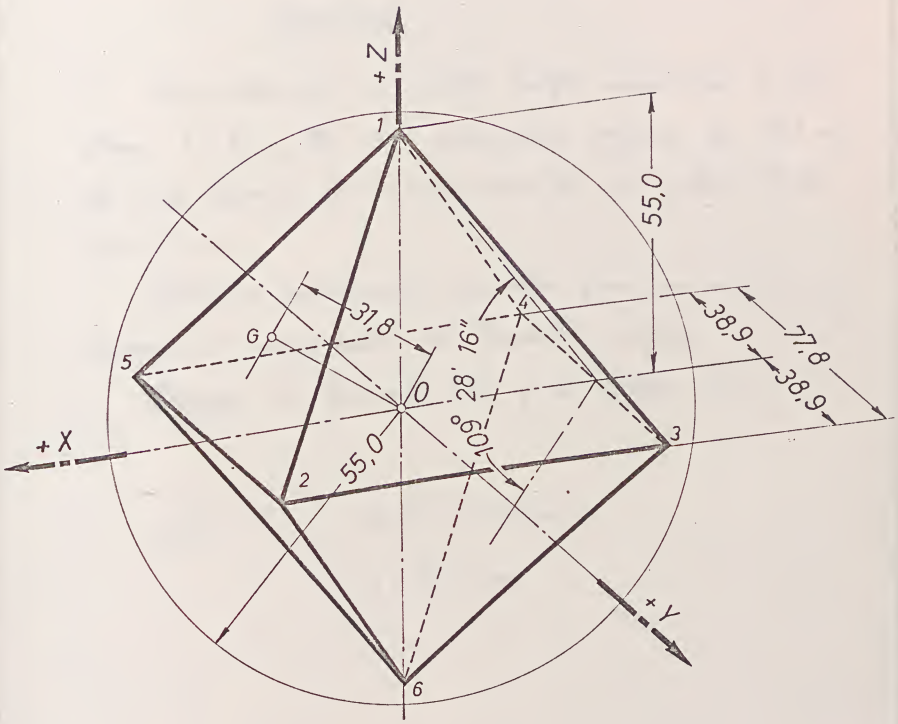
S_8 = Superficie.

V_8 = Volumen.

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
a_8	(21) $\frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8$	0. 70 71 07 ... l_8	×
b_8	(22) $\frac{1}{2}\, l_8$	0, 50 00 00 .... l_8	—
c_8	(23) $\frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8$	0. 40 82 48 .... l_8	×
d_8	(24) $\frac{\sqrt{3}}{3}\, l_8$	0, 57 73 50 .... l_8	×
$2\varphi_8$	(25) $\operatorname{sen}\varphi_8 = \frac{\sqrt{6}}{3}$	$\operatorname{sen}\varphi = 0.81\ 64\ 97$ ... $2\varphi_8 = 109°\ 28'\ 16.4''$	×
k_8	(26) $\frac{\sqrt{3}}{6}\, l_8$	0. 28 86 75 .... l_8	×
S_8	(27) $2\sqrt{3}\, l_8^2$	3. 46 41 02 ... l_8^2	×
V_8	(28) $\frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8^3$	0. 47 14 05 .... l_8^3	×
(29)	Relaciones entre magnitudes		
	$d_8 = 2k_8$	$l_8 = 2b_8$	

UNE A4 210 X 297



Octaedro regular convexo

Lámina 4

Enunciado

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un dodecaedro regular de 39,3 mm de lado, siendo las coordenadas de su centro O(72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

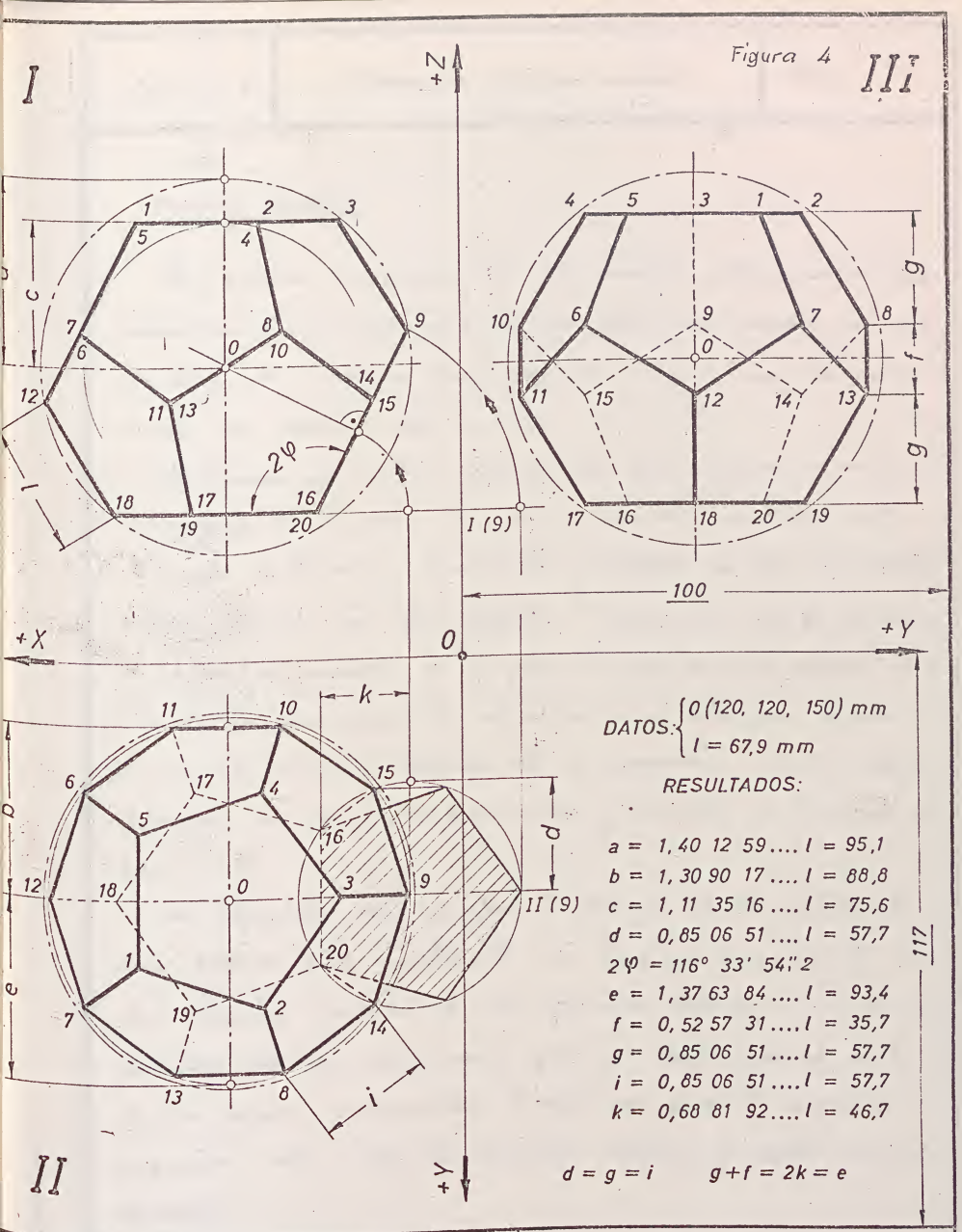
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_2 = 39,3 mm

EUITIS BIBLIOTECA

UNE A4 210 X 297



	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						

Escala 1:2,5

Dodecaedro regular convexo

Lámina 4

Curso 19 -19

PROCESO GRÁFICO

Para facilitar la solución de este ejercicio, situaremos el dodecaedro de forma que una de sus caras sea paralela al plano II y otra contigua perpendicular a I, numerando previamente sus vértices del 1 al 20.

El trazado se inicia situando la cara inferior 16-17-18-19-20 (ver fig. 4) en los planos I y II, y girando simultáneamente dos caras contiguas y consecutivas alrededor de sus respectivas aristas comunes con la inferior;* la proyección de las trayectorias de los vértices girados en el plano II nos permite obtener el radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular que forma el contorno exterior de la proyección sobre II del dodecaedro, así como las proyecciones y aristas de todos sus vértices.

La trayectoria sobre el plano I del giro de los vértices de la cara 9-14-20-16-15, juntamente con las proyecciones de estos vértices obtenidos ya en II, nos permite obtener en I las proyecciones de los mencionados vértices, así como el centro O de la esfera circunscrita, lo cual nos permite completar la proyección sobre I de los restantes vértices y aristas del dodecaedro.

La proyección sobre III se deduce de las I y II.

---

* (intercalar la siguiente frase)

... inferior; la situación de dicha cara en el plano I requiere previamente la determinación del radio de la esfera inscrita, cuyo valor será $O = 1.11 \cdot 35.16 \times 39.3 = 43.7$ mm.

UNE A4 210 X 297

PROCESO GRÁFICO- ANALÍTICO

Para utilizar este proceso se calcularán previamente las magnitudes acotadas en la figura 4, tomando los valores de los coeficientes de la tabla incluida en la misma.

La longitud del lado se ha fijado partiendo de la base de que el radio a de la esfera circunscrita tenga el valor exacto de 55 mm.

La dimensión del lado l con seis decimales, será:

$$l = \frac{55}{1,40\ 12\ 59...} = 39,25\ 04\ 17...\ mm$$

con cuyo valor, como base de cálculo, obtenemos:

$a = 1.40\ 12\ 59 \times 39,25\ 04\ 17 = 55,0$ mm

$b = 1.30\ 90\ 17 \times$ id $= 51,4$ "

$c = 1.11\ 35\ 16 \times$ id $= 43,7$ "

$d = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 33,4$ "

$2\varphi = 116°\ 33'\ 54''$

$e = 1,37\ 63\ 82 \times$ id. $= 54,0$ "

$f = 0,52\ 57\ 31 \times$ id $= 20,6$ "

$g = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 33,4$ "

$i = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 33,4$ "

$k = 0,68\ 81\ 91 \times$ id $= 27,0$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$d = g = i = 33,4$ mm $\quad g + f = 2k = e = 33,4 + 20,6 = 2 \times 27,0 = 54,0$ mm

UNE A4 210 X 297

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 12 pentágonos regulares de 39,3 mm de lado. (dato del ejercicio).

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l_{12} = Lado del dodecaedro dado (dato)

a_{12} = Radio de la esfera circunscrita al dodecaedro

b_{12} = Radio de la esfera tangente a las aristas

c_{12} = Radio de la esfera inscrita

d_{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

2φ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

e_{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular, contorno de la vista II.

f_{12} = Altura intermedia del contorno de las vistas I y II.

g_{12} = Alturas extremas del contorno de las vistas I y III.

i_{12} = Lado del decágono regular, contorno de la vista II.

k_{12} = Apotema del polígono de una cara.

S_{12} = Superficie

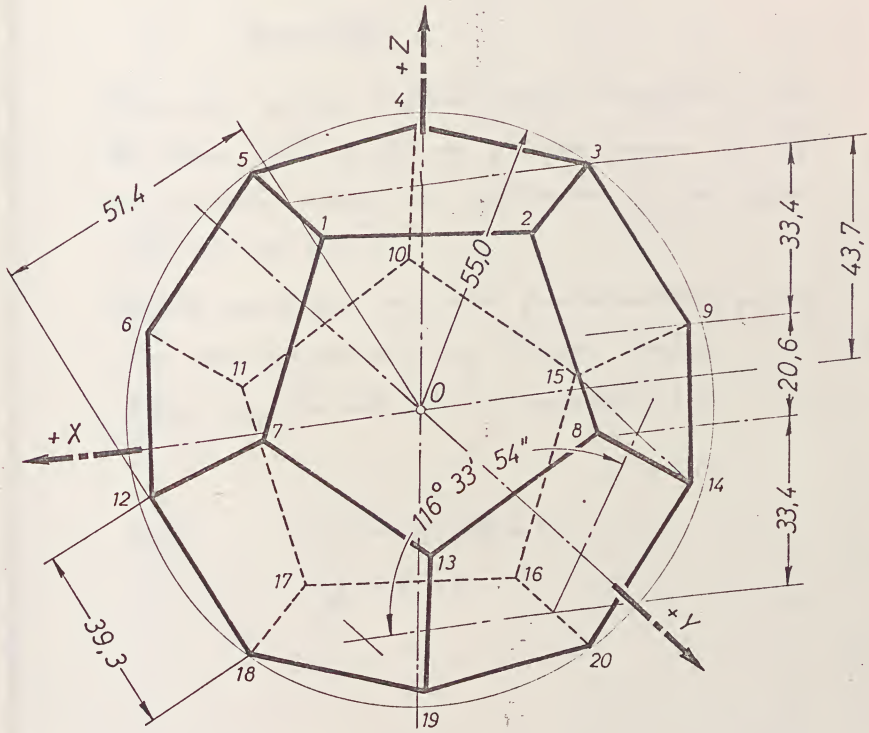
V_{12} = Volumen.

UNE A4 210 X 297

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
a_{12}	(30) $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,\ell_{12}$	1, 40 12 59... ℓ_{12}	×
b_{12}	(31) $\frac{3+\sqrt{5}}{4}\,\ell_{12}$	1, 30 90 17 .... ℓ_{12}	×
c_{12}	(32) $\sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\,\ell_{12}$	1, 11 35 16 --- ℓ_{12}	×
d_{12}	(33) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_{12}$	0, 85 06 51 ... ℓ_{12}	×
2φ	(34) $\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	$\operatorname{sen}\varphi$ = 0, 85 06 51... 2φ = 116° 33' 54,2"	×
e_{12}	(35) $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\,\ell_{12}$	1, 37 63 82 ... ℓ_{12}	×
f_{12}	(36) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,\ell_{12}$	0, 52 57 31 ... ℓ_{12}	×
g_{12}	(37) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_{12}$	0, 85 06 51 ... ℓ_{12}	×
i_{12}	(38) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,\ell_{12}$	0, 85 06 51.... ℓ_{12}	×
k_{12}	(39) $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\,\ell_{12}$	0, 68 81 91 ... ℓ_{12}	×
S_{12}	(40) $3\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,\ell_{12}^2$	20, 64 57 29 .... ℓ_{12}^2	×
V_{12}	(41) $\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\,\ell_{12}^3$	7, 66 31 19 .... ℓ_{12}^3	×
(42)	Relaciones entre magnitudes		
$e_{12} = 2k_{12}$	$d_{12} = g_{12} = i_{12}$	$g_{12} + f_{12} = 2k_{12}$	

UNE A4 210 X 297



Dodecaedro regular convexo

Lámina 5

Enunciado:

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, un icosaedro regular de 57,8 mm. de lado, siendo las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

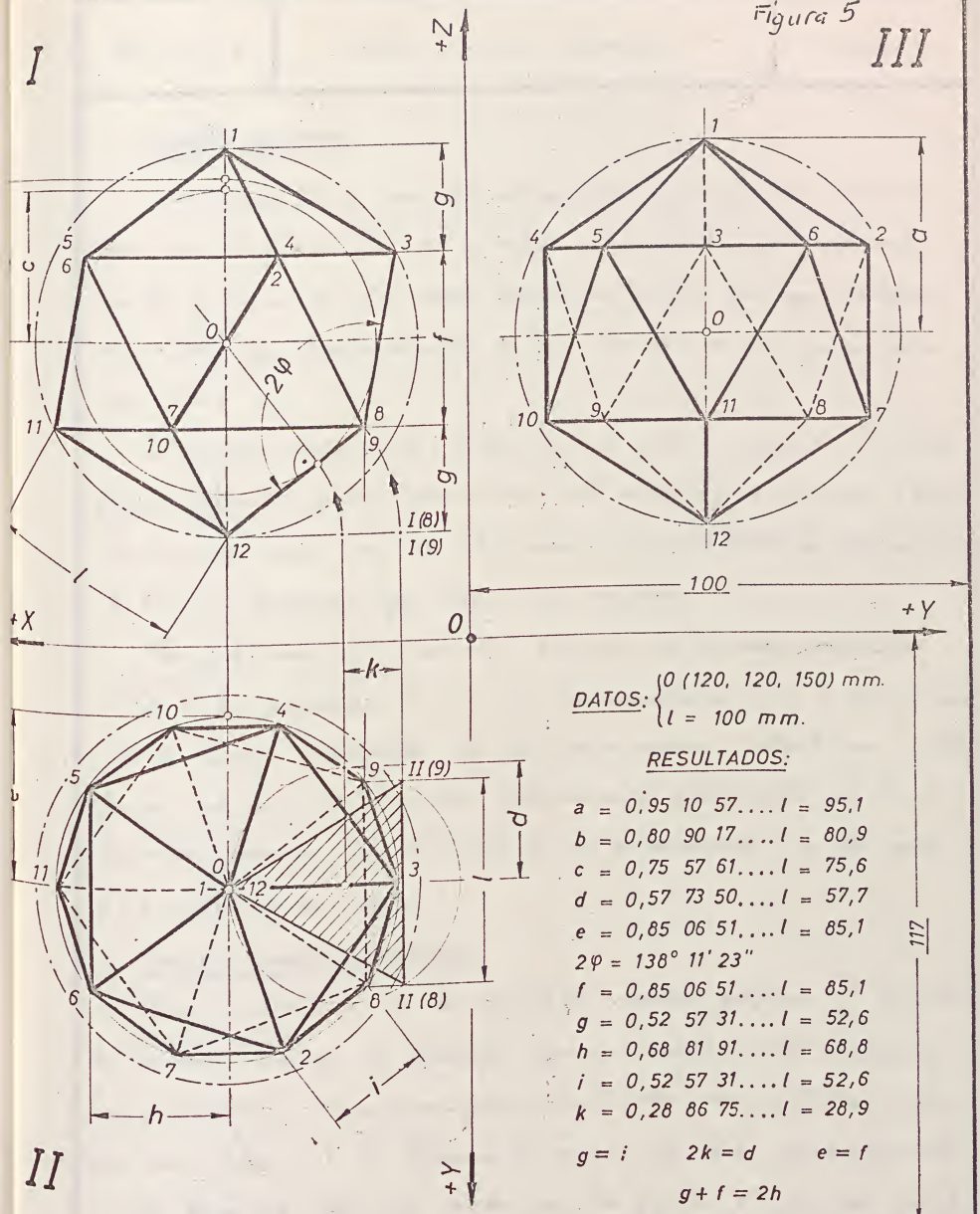
DATOS O (72, 72, 85) mm

l_{20} = 57,8 mm

EUITIS BIBLIOTECA

UNE A4 210 X 297

Figura 5



DATOS: $\begin{cases} 0\ (120,\ 120,\ 150)\ mm. \\ l = 100\ mm. \end{cases}$

RESULTADOS:

$a = 0{,}95\ 10\ 57 \ldots l = 95{,}1$

$b = 0{,}80\ 90\ 17 \ldots l = 80{,}9$

$c = 0{,}75\ 57\ 61 \ldots l = 75{,}6$

$d = 0{,}57\ 73\ 50 \ldots l = 57{,}7$

$e = 0{,}85\ 06\ 51 \ldots l = 85{,}1$

$2\varphi = 138^\circ\ 11'\ 23''$

$f = 0{,}85\ 06\ 51 \ldots l = 85{,}1$

$g = 0{,}52\ 57\ 31 \ldots l = 52{,}6$

$h = 0{,}68\ 81\ 91 \ldots l = 68{,}8$

$i = 0{,}52\ 57\ 31 \ldots l = 52{,}6$

$k = 0{,}28\ 86\ 75 \ldots l = 28{,}9$

$g = i \qquad 2k = d \qquad e = f$

$g + f = 2h$

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
cha:						Curso
mno:						
cala 2,5	Icosaedro regular convexo					Lámina 5
						Curso 19 - 19

PROCESO GRÁFICO

Gráficamente se resuelve este ejercicio situando el icosaedro con un eje (diámetro de la esfera circunscrita) perpendicular a II y una de las cinco caras con vértice en un extremo de dicho eje, perpendicular a I. Los vértices se numerarán del 1 al 12

El trazado gráfico se inicia por el vértice inferior 12 (ver figura n.º 5) construyendo previamente en II el pentágono regular 7-8-9-10-11 cuyo lado sea de 57,8 mm., y completando la proyección II con el decágono que forma su contorno.

Con esta base, y mediante el giro de la cara abatida II (8-9-12), alrededor de un eje perpendicular a I y que pase por 12, podemos completar las dos proyecciones restantes en I y III, ya que el centro I(0) queda determinado fácilmente por la intersección con el eje I (1-12) de la perpendicular a la cara II (8-9-12) por su centro.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reducción de los inevitables errores gráficos, y facilitar al mismo tiempo el trazado, con su continuada comprobación, deberán calcularse previamente las magnitudes acotadas con letras en la figura 5, según la tabla correspondiente.

La longitud del lado dado se ha fijado de forma que el radio a de la esfera circunscrita tenga el valor de 55 mm.

Su dimensión l, con seis decimales, será: $l \cong \dfrac{55}{0{,}95\,10\,57\ldots} \cong 57{,}83\,03\,93$ m.

UNE A4 210 X 297

con cuyo valor tendremos:

$a = 0.95\ 10\ 57 \times 57,83\ 03\ 93 = 55.0$ mm

$b = 0,80\ 90\ 17 \times$ id. $= 46,8$ "

$c = 0,75\ 57\ 61 \times$ id. $= 43.7$ "

$d = 0,57\ 73\ 50 \times$ id. $= 33.4$ "

$e = 0,85\ 06\ 51 \times$ id. $= 49,2$ "

$2\varphi = 138° 11' 23''$

$f = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 49,2$ "

$g = 0,52\ 57\ 31 \times$ id $= 30,4$ "

$h = 0,68\ 81\ 91 \times$ id $= 39,8$ "

$i = 0,52\ 57\ 31 \times$ id $= 30,4$ "

$k = 0,28\ 86\ 75 \times$ id $= 16,7$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$g = i = 30,4$ mm

$2k = d = 2 \times 16,7 = 33.4$ mm

$e = f = 49,2$ mm

$g + f = 2h = 30,4 + 49,2 = 2 \times 39,8 = 79,6$ mm

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 20 triángulos equiláteros de 57,8 mm de lado (dato del ejercicio).

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l_{20} = Lado del icosaedro dado (dato).

a_{20} = Radio de la esfera circunscrita al icosaedro.

b_{20} = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c_{20} = Radio de la esfera inscrita.

d_{20} = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

2φ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

e_{20} = Radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular de lado $\underline{l}$ y también al decágono regular de lado $\underline{i}$, contorno de la vista II.

f_{20} = Altura intermedia del contorno de las vistas I y III.

g_{20} = Alturas extremas del contorno de las vistas I y III.

h_{20} = Apotema de un pentágono regular de lado $\underline{l}$.

i_{20} = Lado del decágono regular, contorno de la vista II.

k_{20} = Apotema del polígono de una cara.

S_{20} = Superficie.

V_{20} = Volumen.

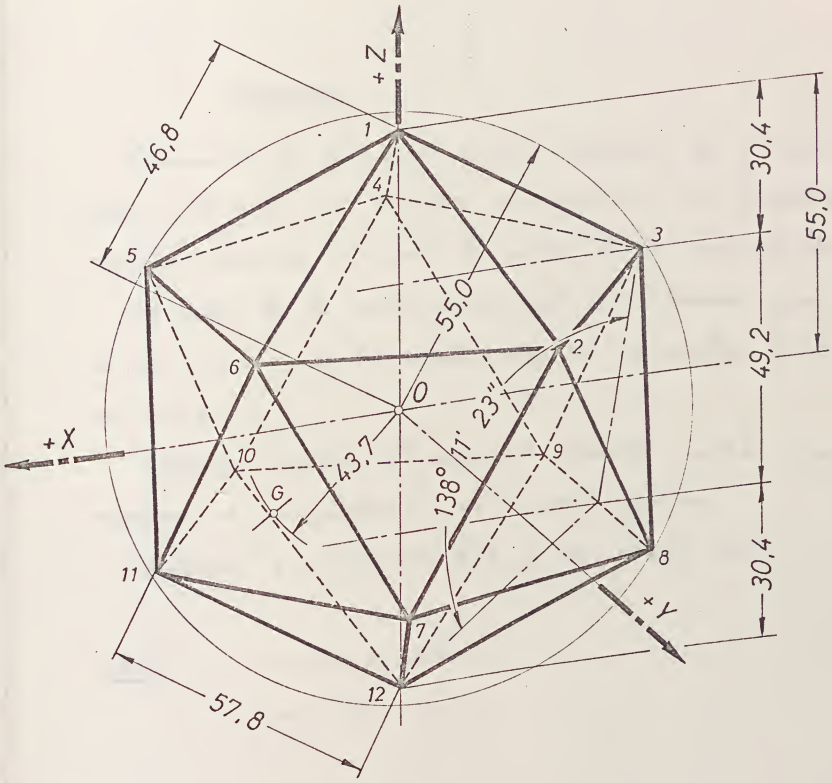
CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
a_{20}	(43) $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\ l_{20}$	0, 95 10 57 ... l_{20}	X
b_{20}	(44) $\frac{1+\sqrt{5}}{4}\ l_{20}$	0, 80 90 17 .... l_{20}	X
c_{20}	(45) $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\ l_{20}$	0, 75 57 61 .... l_{20}	X
d_{20}	(46) $\frac{\sqrt{3}}{3}\ l_{20}$	0, 57 73 50 ... l_{20}	X
2φ	(47) $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$	$\operatorname{sen}\varphi$ = 0,93 41 72 .... 2φ = 138° 11' 22,8"	X
e_{20}	(48) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	0, 85 06 51 ... l_{20}	X
f_{20}	(49) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	0, 85 06 51 ... l_{20}	X
g_{20}	(50) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	0, 52 57 31 ... l_{20}	X
h_{20}	(51) $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\ l_{20}$	0, 68 81 91 .... l_{20}	X
i_{20}	(52) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	0, 52 57 31 ... l_{20}	X
k_{20}	(53) $\frac{\sqrt{3}}{6}\ l_{20}$	0, 28 86 75 ... l_{20}	X
S_{20}	(54) $5\sqrt{3}\ l_{20}^2$	8, 66 02 54 ... l_{20}^2	X
V_{20}	(55) $\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\ l_{20}^3$	2, 18 16 95 ... l_{20}^3	X

(56) Relaciones entre magnitudes

$g_{20} = i_{20}$ $\quad 2k_{20} = d_{20}$ $\quad e_{20} = f_{20}$ $\quad g_{20} + f_{20} = 2h_{20}$

UNE A4 210 X 297



Icosaedro regular convexo

Lámina 6

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el tetraedro conjugado de un tetraedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al tetraedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

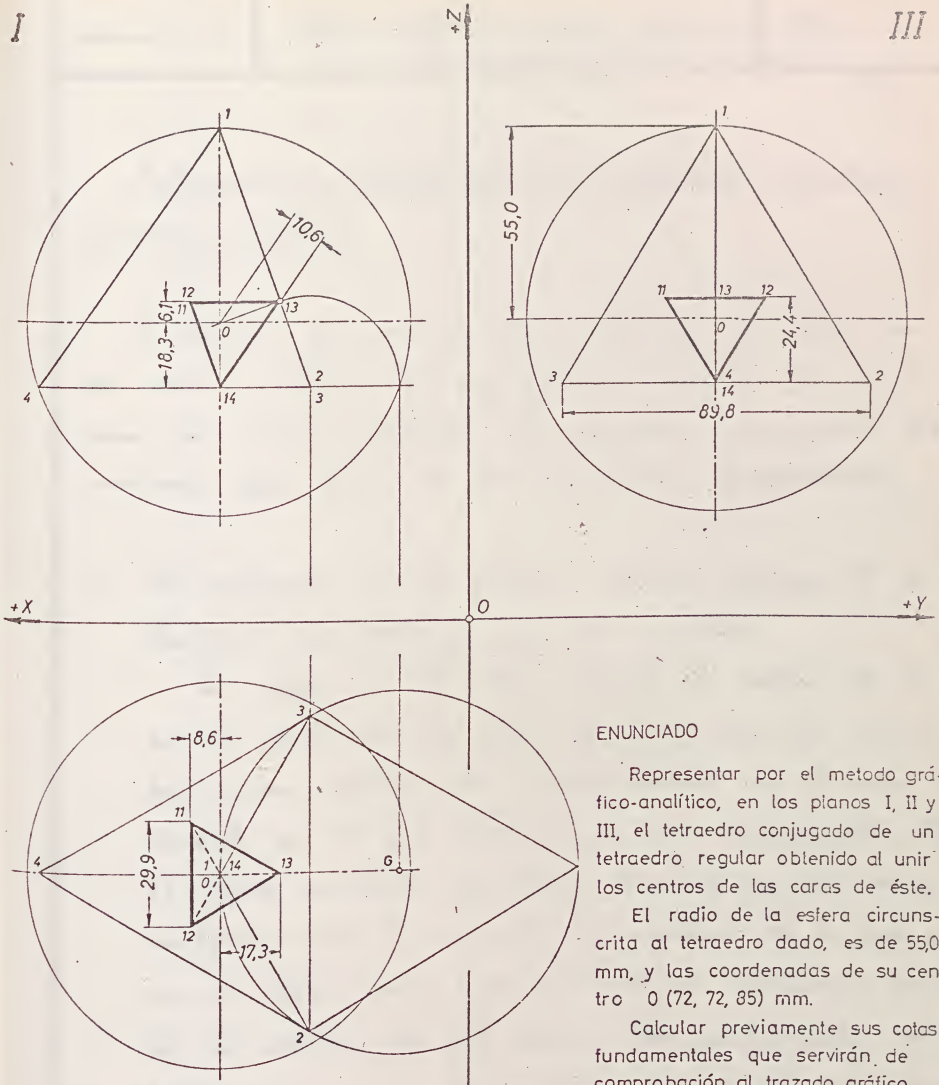
DATOS O (72, 72, 85) mm

a_3 = 55,0 mm.

UNE A4 210 X 297

I

III



ENUNCIADO

Representar por el metodo gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el tetraedro conjugado de un tetraedro regular obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al tetraedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dato..... 1 al 4

Tetraedro conjugado..... 11 al 14

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 6
						Curso 19 - 19

Definiciones y propiedades de los poliedros regulares convexos conjugados

Si unimos con un segmento rectilíneo los centros de dos caras contiguas de un poliedro regular P, se obtiene un nuevo poliedro P', llamado "conjugado" del anterior, que goza de las siguientes propiedades:

1º El conjugado P' del poliedro regular convexo P, es también un poliedro regular convexo.

En efecto: a) Al estar situados los vértices de P' en los centros de las caras de P, y ser éste regular, dichos vértices del P' pertenecerán a la esfera inscrita en P, que será a su vez circunscrita a P'; b) Siendo constante el diedro formado por dos caras contiguas de P, e iguales las apotemas de los polígonos de dichas caras, será constante la distancia entre los centros de estas caras. Por consiguiente, el poliedro convexo P' tiene todas sus aristas iguales y es inscriptible en una esfera, luego es "regular"

2º El conjugado P' del poliedro regular convexo P, tiene un número de vértices V' igual al de caras C de P.

En efecto, por su formación, al centro de cada ca-

UNE A4 210 X 297

da cara de P le corresponde un vértice de P'.

El número de caras C, vértices V y aristas A de los cinco poliedros regulares convexos, es el siguiente:

Poliedro regular	Caras C	Vértices V	Aristas A
TETRAEDRO	4	4	6
EXAEDRO	6	8	12
OCTAEDRO	8	6	12
DODECAEDRO	12	20	30
ICOSAEDRO	20	12	30

Así pues, y teniendo en cuenta las propiedades 1ª y 2ª, se verificará que:

a) El poliedro conjugado del tetraedro regular, tendrá 4 vértices y por consiguiente será un TETRAEDRO REGULAR.

b) El poliedro conjugado del exaedro regular, tendrá 6 vértices y por consiguiente será un OCTAEDRO REGULAR.

c) El poliedro conjugado del octaedro regular, tendrá 8 vértices y por consiguiente será un EXAEDRO REGULAR.

d) El poliedro conjugado del dodecaedro regular, ten-

UNE A4 210 X 297

dirá 12 vértices y por consiguiente será un ICOSAEDRO REGULAR.

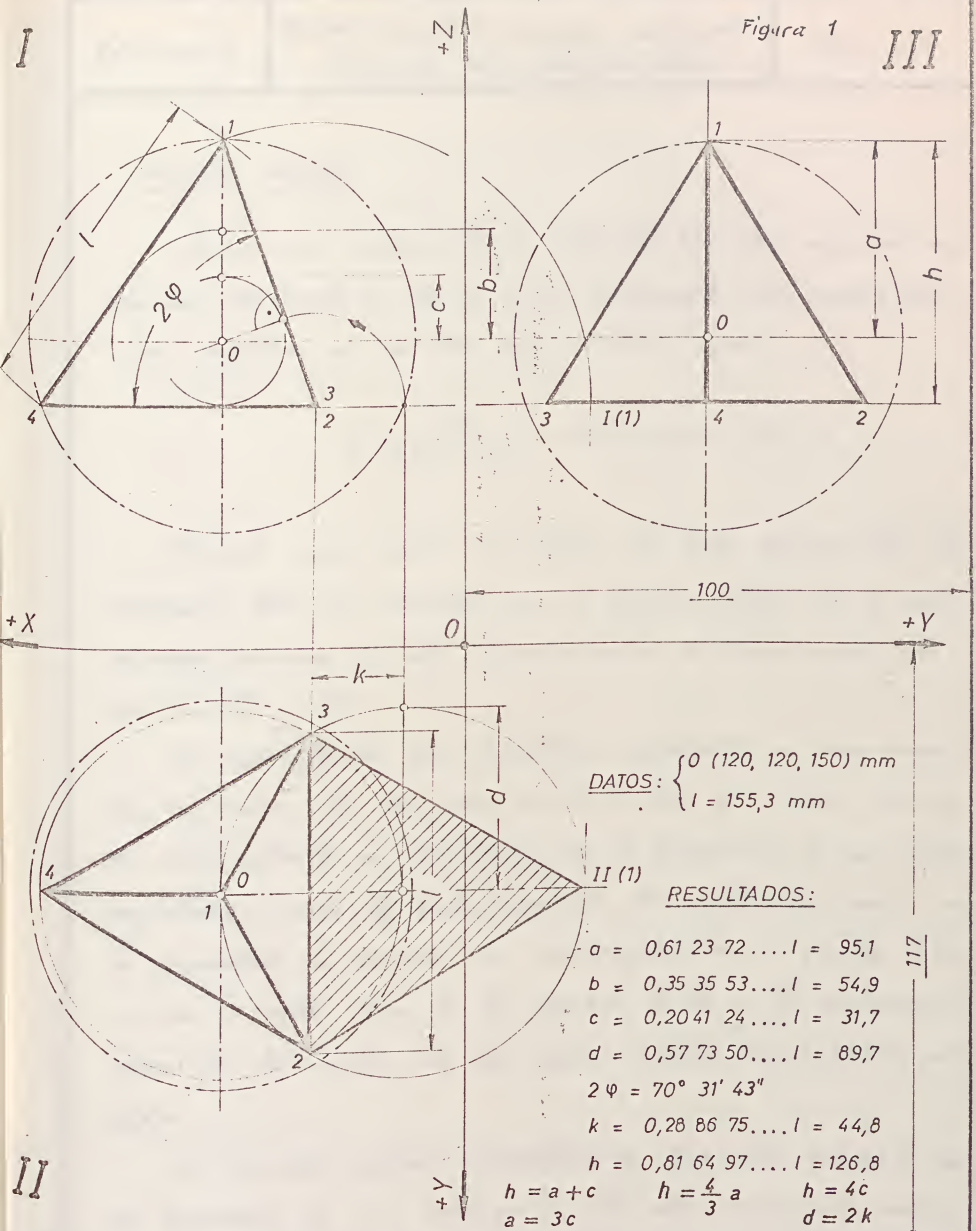
e) El poliedro conjugado del icosaedro regular, tendrá 20 vértices y por consiguiente será un DODECAEDRO REGULAR.

De lo expuesto se deduce que el exaedro y octaedro regulares son mutuamente conjugados (cada uno lo es del otro). Igualmente son mutuamente conjugados el dodecaedro e icosaedro regulares. El tetraedro regular es conjugado de sí mismo.

En las láminas 6 al 10 estudiaremos la representación de estos poliedros conjugados, así como el estudio analítico de las magnitudes del conjugado en función de las del poliedro dado.

EUITIS BIBLIOTECA

UNE A4 210 X 297



DATOS: $\begin{cases} O\ (120,\ 120,\ 150)\ mm \\ l = 155{,}3\ mm \end{cases}$

RESULTADOS:

$a = 0{,}61\ 23\ 72 \ldots . l = 95{,}1$

$b = 0{,}35\ 35\ 53 \ldots . l = 54{,}9$

$c = 0{,}20\ 41\ 24 \ldots . l = 31{,}7$

$d = 0{,}57\ 73\ 50 \ldots . l = 89{,}7$

$2\varphi = 70°\ 31'\ 43''$

$k = 0{,}28\ 86\ 75 \ldots . l = 44{,}8$

$h = 0{,}81\ 64\ 97 \ldots . l = 126{,}8$

$h = a + c$ $\quad h = \frac{4}{3} a$ $\quad h = 4c$

$a = 3c$ $\quad d = 2k$

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
cha:						Curso
nno:						
cala 2,5	Tetraedro regular convexo					Lámina 6
						Curso 19 - 19

PROCESO GRÁFICO

Determinar previamente el lado del tetraedro regular, en función del radio a de la esfera circunscrita (ver proceso gráfico-analítico de la lám. 1); el lado l será:

$$l_4 = \frac{55}{0,61\ 23\ 72..} = 89,81\ 46\ 88 \simeq 89,8 \text{ mm}$$

Tomando como punto de partida este lado, representar el tetraedro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lámina 1. Esta representación se hará en los planos I, II y III.

La representación del tetraedro conjugado se hará uniendo los centros de las caras del tetraedro primitivo, los cuales están situados en el espacio, en el baricentro de sus caras respectivas (punto de intersección de las medianas); como esta propiedad se conserva en sus proyecciones, es posible determinar en cada uno de los planos I, II y III, las proyecciones de los centros de las caras, vértices del poliedro pedido.

El trazado puede simplificarse teniendo presente que el baricentro de un triángulo está sobre cualquier mediana a dos tercios de su longitud a partir del vértice correspondiente.

Una comprobación de este trazado es la correspon-

UNE A4 210 X 297

dencia de las proyecciones de los vértices del tetraedro al obtenerse éstos independientemente en cada proyección.

Este trazado es laborioso y falto de precisión, por lo que es conveniente simplificarlo con el proceso gráfico - analítico.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Para la reducción de los errores de trazado, nos serviremos de cotas analíticas calculadas previamente en la forma que a continuación exponemos.

Observemos previamente que la esfera inscrita en el tetraedro dado, es concéntrica con la circunscrita, siendo aquélla a su vez tangente a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por consiguiente calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al tetraedro dado, que será el de la circunscrita del tetraedro conjugado.

Así pues, teniendo en cuenta el cálculo de la lámina 1ª, se verificará:

$$c_4 = a'_4 = 0.20\ 41\ 24 \times 89,81\ 46\ 88 = 18,33\ 33\ 34 \cong 18,3 \text{ mm.}$$

y por consiguiente el lado del tetraedro conjugado valdrá:

$$l'_4 = \frac{18,33\ 33\ 34}{0,61\ 23\ 72} = 29,93\ 82\ 30 \cong 29,9 \text{ mm}$$

con cuyo valor podemos calcular los restantes de este tetraedro que se expresan a continuación:

$a'_4 = 0{,}61\ 23\ 72 \times 29{,}93\ 82\ 30 = 18{,}3$ mm

$b'_4 = 0{,}35\ 35\ 53 \times$ id. $= 10{,}6$ "

$c'_4 = 0{,}20\ 41\ 24 \times$ id $= 6{,}1$ "

$d'_4 = 0{,}57\ 73\ 50 \times$ id $= 17{,}3$ "

$2\varphi = 70^\circ\ 31'\ 43''$

$k'_4 = 0{,}28\ 86\ 75 \times$ id $= 8{,}6$ "

$h'_4 = 0{,}81\ 64\ 97 \times$ id $= 24{,}4$ "

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$$h'_4 = a'_4 + c'_4 = 24{,}4 = 18{,}3 + 6{,}1 \qquad h'_4 = \frac{4}{3}a = \frac{4 \times 18{,}3}{3} = 24{,}4 \text{ mm}$$

$$h'_4 = 4c'_4 = 24{,}4 = 4 \times 6{,}1 \qquad a'_4 = 3c'_4 = 18{,}3 = 3 \times 6{,}1$$

$$d'_4 = 2k'_4 = 17{,}3 = 2 \times 8{,}6$$

La relación entre los radios de las esferas circunscritas al tetraedro dado y al conjugado de éste, será la misma que la existente entre los radios de las esferas circunscrita é inscrita a un mismo tetraedro. Estos valores son:

$$a_4 = \frac{\sqrt{6}}{4}\, l_4 \qquad c_4 = \frac{\sqrt{6}}{12}\, l_4$$

y por consiguiente:

$$\frac{a_4}{a'_4} = \frac{a_4}{c_4} = \frac{\sqrt{6}}{4}\, l_4 : \frac{\sqrt{6}}{12}\, l_4 = 3 \qquad [1]$$

El lado l'_4 del tetraedro conjugado, en función del la-

UNE A4 210 X 297

do l_4 dado, será pues

$$a_4 = \frac{\sqrt{6}}{4}\, l_4 \; ; \qquad c_4 = a'_4 = \frac{\sqrt{6}}{12}\, l_4 \qquad \text{de donde}$$

$$l'_4 = a'_4 : \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{12}\, l_4 : \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{3}\, l_4 \qquad [2]$$

y la relación entre los lados de ambos poliedros sigue siendo

$$\frac{l_4}{l'_4} = 3 \qquad [3]$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene el tetraedro conjugado por acoplamiento de 4 triángulos equiláteros de 29,9 mm de lado, situado interiormente en otro tetraedro regular formado por 4 caras triangulares (transparentes) de 89,8 mm de lado, de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_4 = Lado del tetraedro conjugado.

a'_4 = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_4 = Radio de la esfera tangente a las aristas del id.

c'_4 = Radio de la esfera inscrita al id.

UNE A4 210 X 297

d'_4 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara del id.

2φ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas del id.

k'_4 = Apotema del polígono de una cara del id.

h'_4 = Altura del tetraedro id.

S'_4 = Superficie del id.

V'_4 = Volumen del id.

Los valores anteriores del tetraedro conjugado pueden obtenerse directamente en función del lado $\underline{l_4}$ del tetraedro dado, ya que conocemos la razón de semejanza de ambos.

Así pues, las magnitudes lineales serán $\frac{1}{3}$ de las del dado; las superficiales serán $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ de las del dado, y las volumétricas serán $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ de las del mencionado tetraedro dado.

Tomando los valores del cuadro sinóptico de la lámina 1, para el tetraedro dado, se obtendrían los correspondientes al tetraedro conjugado en función de l_4, que resumimos en el cuadro siguiente:

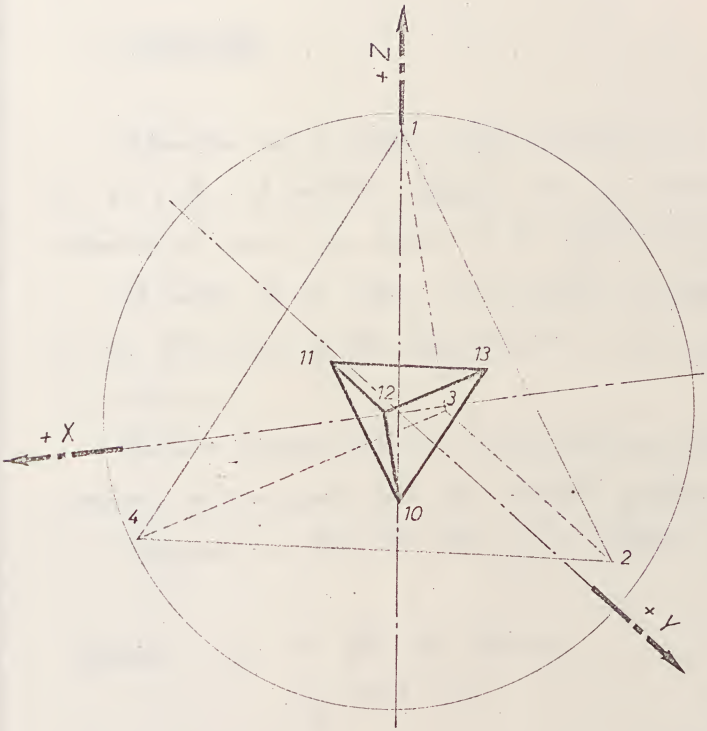
UNE A4 210 X 297

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
l'_4	(56) $\frac{1}{3}\ l_4$	0. 33 33 33 --- l_4	–
a'_4	(57) $\frac{\sqrt{6}}{18}\ l_4$	0, 20 41 24 ... l_4	×
b'_4	(58) $\frac{\sqrt{2}}{12}\ l_4$	0, 11 78 51 .... l_4	×
c'_4	(59) $\frac{\sqrt{6}}{36}\ l_4$	0, 06 80 41 --- l_4	×
d'_4	(60) $\frac{\sqrt{3}}{9}\ l_4$	0, 19 24 50 ... l_4	×
2φ	(61) $\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen}\varphi = 0,57\ 73\ 50$ --- $2\varphi = 70°\ 31'\ 43,4''$	×
k'_4	(62) $\frac{\sqrt{3}}{18}\ l_4$	0, 09 62 25 ... l_4	×
h'_4	(63) $\frac{\sqrt{6}}{9}\ l_4$	0, 27 21 66 ... l_4	×
S'_4	(64) $\frac{\sqrt{3}}{9}\ l_4^2$	0, 19 24 50 ... l_4^2	×
V'_4	(65) $\frac{\sqrt{2}}{324}\ l_4^3$	0. 00 43 65 ... l_4^2	×

(66) Relaciones entre magnitudes

$L_4 : l'_4 = 3$ $\quad S_4 : S'_4 = 9$ $\quad V_4 : V'_4 = 27$



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 7

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el octaedro conjugado de un exaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al exaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS

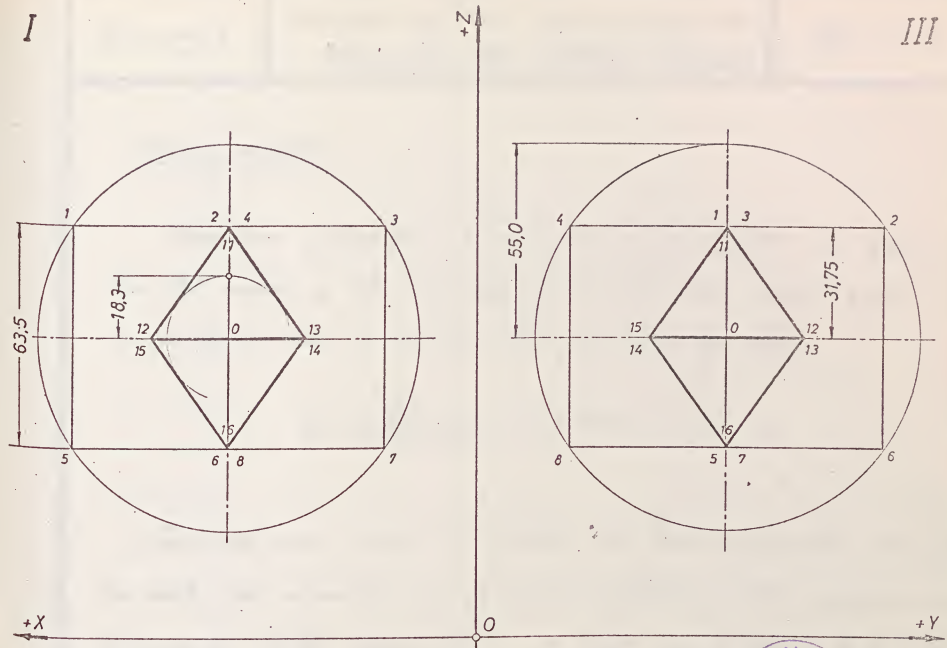
O (72, 72, 85) mm

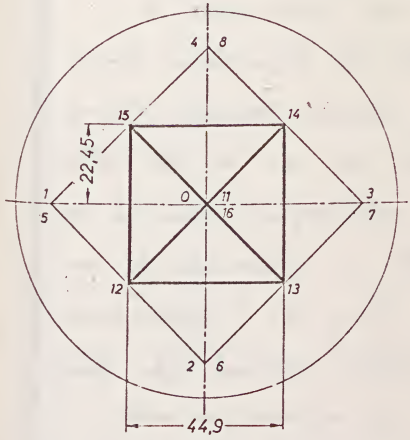
a_c = 55,0 mm

UNE A4 210 X 297

I

III





NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro dato..... 1 al 8

Octaedro conjugado..... 11 al 16

+Y

EUITIS BIBLIOTECA

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el octaedro conjugado de un exaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al exaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro O(72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						

II

Escala		Lámina
1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	7
		Curso 19 -19

PROCESO GRÁFICO

Determinar previamente el lado del exaedro regular, en función del radio a de la esfera circunscrita (ver proceso gráfico-analítico de la lámina 2); el lado l será:

$$l_6 = \frac{55}{0,86\,60\,25} = 63,50\,85\,60 \cong 63,5 \text{ mm}$$

Tomando como punto de partida este lado, representar el exaedro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lámina 2. Esta representación se hará en los planos I, II y III.

La representación del octaedro conjugado se hará determinando previamente los centros de cada cara del exaedro primitivo, teniendo presente que las proyecciones de cada uno de ellos son a su vez centros de los rectángulos o cuadrados de las caras proyectadas. Uniendo adecuadamente las proyecciones de estos centros se obtendrá en cada uno de los planos coordenados I, II y III, la representación del octaedro conjugado del exaedro dado.

Una comprobación de este trazado es la verificar la correspondencia de las proyecciones del centro de cada cara, obtenidas independientemente en cada plano de proyección.

El trazado anterior puede simplificarse con el proceso gráfico-analítico que a continuación exponemos.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Para la reducción de los errores de trazado, nos serviremos de cotas analíticas calculadas previamente de la forma siguiente.

Observemos previamente que la esfera inscrita en el exaedro dado, es concéntrica con la circunscrita, siendo aquélla a su vez tangente a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por consiguiente, calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al exaedro dado, que será la circunscrita al octaedro conjugado.

Así pues, y teniendo en cuenta el cálculo de la lámina 2ª, se verificará:

$$C_6 = a'_8 = 0,5 \times 63.50\ 85\ 60 = 31,75\ 42\ 80 \cong 31,75 \text{ mm.}$$

y por consiguiente, el lado del octaedro conjugado, valdrá: (ver figura 3ª)

$$l'_8 = \frac{31.75\ 42\ 80}{0,70\ 71\ 07} = 44,90\ 73\ 19 \cong 44,9 \text{ mm}$$

con cuyo valor, y de acuerdo con la tabla de la figura 3ª, podemos calcular los restantes del octaedro que se expresan a continuación:

$a'_8 = 0.70\ 71\ 07 \times 44,90\ 73\ 19 = 31.8$ mm

$b'_8 = 0,50\ 00\ 00 \times$ id $= 22,45$ "

$c'_8 = 0,40\ 82\ 48 \times$ id $= 18.3$ "

$d'_8 = 0,57\ 73\ 50 \times$ id $= 25,9$ "

$2\varphi = 109° 28' 16''$

UNE A4 210 X 297

$$k'_8 = 0,28\ 86\ 75 \times 44,90\ 73\ 19 = 13,0 \text{ mm.}$$

con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$d'_8 = 2k'_8 \quad 25,9 = 2 \times 13,0 \qquad l'_8 = 2b'_8 \quad 44,9 = 2 \times 22,45$

La relación entre los radios de las esferas circunscritas al exaedro dado y al conjugado de éste, será la misma que la existente entre los radios de las esferas circunscrita e inscrita al exaedro dado, cuyos valores son:

$$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l_6 \qquad c_6 = \frac{1}{2}\, l_6$$

y por consiguiente:

$$\frac{a_6}{a'_8} = \frac{a_6}{c_6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l_6 : \frac{1}{2}\, l_6 = \sqrt{3} = 1,73\ 20\ 51\ldots \qquad [1]$$

El lado l'_8 del octaedro conjugado, en función del lado l_6 del exaedro dado, será pues

$$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, l_6 \qquad c_6 = a'_8 = \frac{1}{2}\, l_6 \qquad \text{de donde}$$

$$l'_8 = a'_8 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\, l_6 : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6 = 0,70\ 71\ 07\ldots l_6 \qquad [2]$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene el octaedro conjugado por acoplamiento de 8 triángulos equiláteros de 44,9 mm de lado, situado interiormente en un exaedro regular formado por 6 caras

UNE A4 210 X 297

cuadradas (Transparentes) de 63,5 mm de lado, de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_8 = Lado del octaedro conjugado

a'_8 = Radio de la esfera circunscrita al mismo

b'_8 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_8 = Radio de la esfera inscrita

d'_8 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara

$2\varphi_8$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas

k'_8 = Apotema del polígono de una cara.

S'_8 = Superficie.

V'_8 = Volumen.

Los valores anteriores del octaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_6 del exaedro dado, ya que el valor conocido de l'_8 en función de l_6 (ver fórmula [2]), es

$$l'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6$$

UNE A4 210 X 297

Sustituyendo este valor en las fórmulas 21 a 28 de la lámina 3, tendremos:

$$a'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6 = \frac{1}{2}\, l_6 ; \qquad b'_8 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6 = \frac{\sqrt{2}}{4}\, l_6 ;$$

$$c'_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6 = \frac{\sqrt{12}}{12}\, l_6 = \frac{2\sqrt{3}}{12}\, l_6 = \frac{\sqrt{3}}{6}\, l_6 ; \qquad d'_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_6 ; \qquad k'_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6 = \frac{\sqrt{6}}{12}\, l_6 ; \qquad S'_8 = 2\sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6\right)^2 =$$

$$= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\, l_6^{\,2} = \sqrt{3}\, l_6^{\,2} ; \qquad V'_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{8}\, l_6^{\,3} =$$

$$= \frac{4}{24}\, l_6^{\,3} = \frac{1}{6}\, l_6^{\,3} .$$

Son útiles las siguientes relaciones de magnitudes:

a) $$\frac{l_6}{l'_8} = \sqrt{2}$$ (ver fórmula [23])

b) $$\frac{S_6}{S'_8} = \frac{6\, l_6^{\,2}}{\sqrt{3}\, l_6^{\,2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

c) $$\frac{V_6}{V'_8} = \frac{l_6^{\,3}}{\frac{1}{6}\, l_6^{\,3}} = 6$$

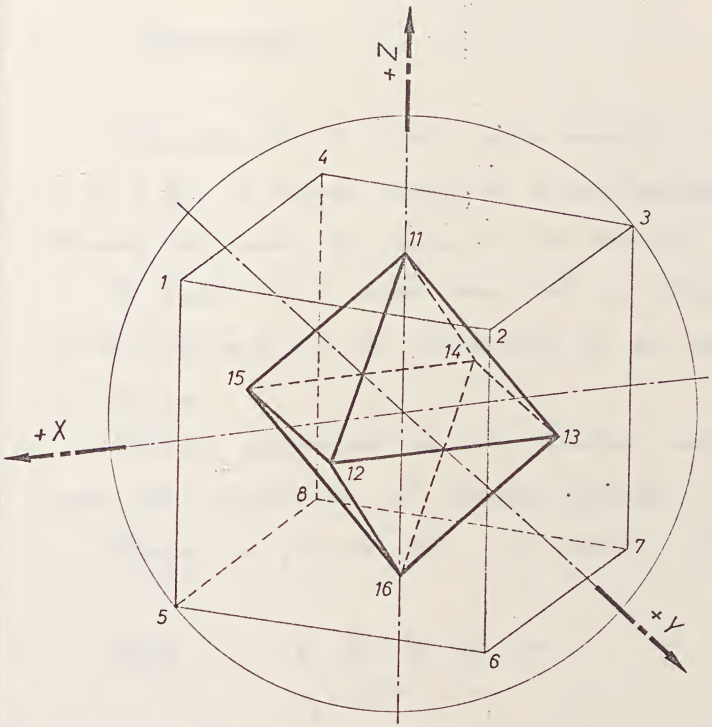
En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados.

UNE A4 210 X 297

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
l'_8	(67) $\frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6$	0, 70 71 07.... l_6	+
a'_8	(68) $\frac{1}{2}\, l_6$	0, 50 00 00 ... l_6	−
b'_8	(69) $\frac{\sqrt{2}}{4}\, l_6$	0, 35 35 53 ... l_6	+
c'_8	(70) $\frac{\sqrt{3}}{6}\, l_6$	0, 28 86 75 ... l_6	+
d'_8	(71) $\frac{\sqrt{6}}{6}\, l_6$	0, 40 82 48 ... l_6	+
$2\varphi_8$	(72) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	$\operatorname{sen} \varphi = 0.81\ 64\ 97...$ $2\varphi = 109^\circ\ 28'\ 16{,}6''$	+
k'_8	(73) $\frac{\sqrt{6}}{12}\, l_6$	0, 20 41 24 ... l_6	+
S'_8	(74) $\sqrt{3}\, l_6^2$	1, 73 20 51 ... l_6^2	+
V'_8	(75) $\frac{1}{6}\, l_6^3$	0, 16 66 67 ... l_6^3	−
(76) Relaciones entre magnitudes			
$l_6 : l'_8$	(77) $\sqrt{2}$	1, 41 42 14 ...	+
$S_6 : S'_8$	(78) $2\sqrt{3}$	3, 46 41 02 ...	+
$V_6 : V'_8$	(79) 6	6. 00 00 00 ...	−

UNE A4 210 X 297



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 8

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el exaedro conjugado de un octaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al octaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

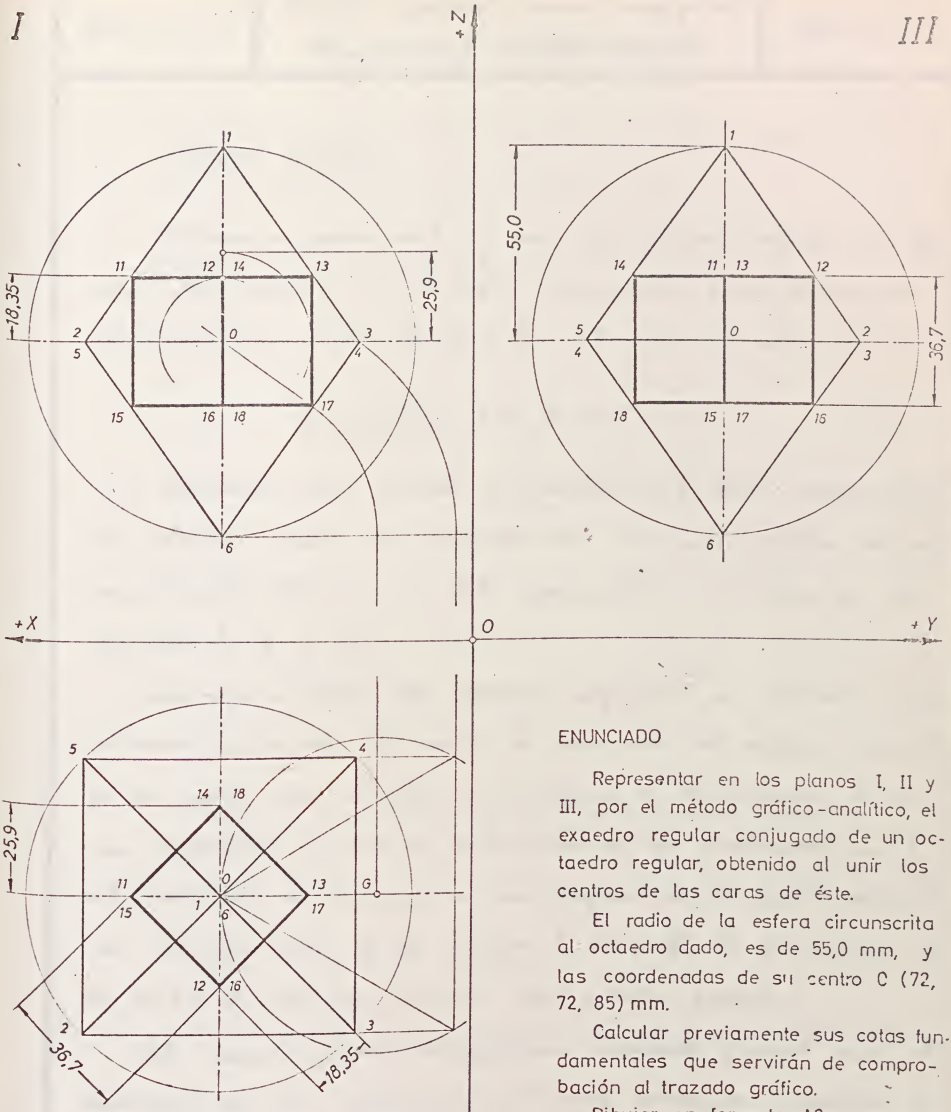
Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

$a_8 = 55,0$ mm

UNE A4 210 X 297



ENUNCIADO

Representar en los planos I, II y III, por el método gráfico-analítico, el exaedro regular conjugado de un octaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al octaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro C (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Octaedro dato..... 1 al 6

Exaedro conjugado..... 11 al 18

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 8
						Curso 19 - 19

PROCESO GRÁFICO

Determinar previamente el lado del octaedro regular, en función del radio a de la esfera circunscrita (ver proceso gráfico-analítico de la lámina 3); el lado l_8 será:

$$l_8 = \frac{55}{0,70\,71\,07} = 77,78\,17\,22 \cong 77,8 \text{ mm}$$

Tomando como punto de partida este lado, representar el octaedro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lámina 3. Esta representación se hará en los planos I, II y III.

La representación del exaedro conjugado se efectuará determinando previamente los centros de cada cara del octaedro primitivo, los cuales están situados en el espacio; en el baricentro de sus caras respectivas (puntos de intersección de las medianas); como esta propiedad se conserva en sus proyecciones, es posible determinar en cada uno de los planos I, II y III, las proyecciones de los centros de las caras, vértices del poliedro pedido.

Este trazado puede simplificarse teniendo presente que el baricentro de un triángulo está sobre cualquier mediana a dos tercios de su longitud a partir del vértice.

Una comprobación del trazado es la correspondencia de las proyecciones de los vértices del exaedro al obtenerse éstos independientemente en cada proyección.

La falta de precisión de este trazado, así como su laborio-

UNE A4 210 X 297

su ejecución, puede simplificarse con el proceso gráfico-analítico que a continuación exponemos.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reducción de los errores de trazado, nos serviremos de cotas analíticas calculadas previamente de la forma siguiente.

Observemos previamente que la esfera inscrita en el octaedro dado, es concéntrica con la circunscrita, (siendo aquélla a su vez) tangente a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por consiguiente, calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al octaedro dado, que será la circunscrita al exaedro conjugado.

Así pues, y teniendo en cuenta el cálculo de la lámina 3ª, se verificará:

$$c_8 = a'_6 = 0,40\ 82\ 48 \times 77,78\ 17\ 22 = 31,75\ 42\ 32 \cong 31,8 \text{ mm}$$

y por consiguiente, el lado del exaedro conjugado (fig. 2ª), saldrá

$$l'_6 = \frac{31,75\ 42\ 32}{0,86\ 60\ 25} = 36,66\ 66\ 46 \cong 36,7 \text{ mm.}$$

con cuyo valor, y de acuerdo con la tabla de la figura 2ª, podemos calcular los restantes del exaedro conjugado que se expresan a continuación:

$a'_6 = 0,86\ 60\ 25 \times 36,66\ 66\ 46 = 31,8$ mm

$b'_6 = 0,70\ 71\ 07 \times$ id $= 25,9$ "

$c'_6 = 0,50\ 00\ 00 \times$ id $= 18,35$ "

$d'_6 = 0,70\ 71\ 07 \times$ id $= 25,9$ "

UNE A4 210 X 297

$$2\varphi = 90^\circ$$

$$k'_6 = 0.50\ 00\ 00 \times 36,66\ 66\ 46 = 18,3 \text{ mm}$$

con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$$c'_6 = k'_6 = 18,3 \text{ mm} \qquad b'_6 = d'_6 = 25,9 \qquad h'_6 = 2c'_6 = 2k'_6 = 2 \times 18,35 = 36,7$$

La relación entre los radios de las esferas circunscritas al octaedro dado y al conjugado de éste, será la misma que la existente entre los radios de las esferas circunscrita e inscrita al octaedro dado, cuyos valores son:

$$a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 \qquad c_8 = \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8$$

y por consiguiente:

$$\frac{a_8}{c_8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 : \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8 = \sqrt{3} = 1,73\ 20\ 51\ldots \qquad [1]$$

El lado l'_6 del exaedro conjugado, en función del lado l_8 del octaedro dado, será pues

$$a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 \qquad c_8 = a'_6 = \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8 \qquad \text{de donde}$$

$$l'_6 = d'_6 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = 0,47\ 14\ 05\ldots\, l_8 \qquad [2]$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene el exaedro conjugado por acoplamiento de 6 cuadrados de 36,7 mm de lado, situado interiormente en un octaedro regular formado por 8 caras triangulares (transparentes) de 77,8 mm de lado, de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_6 = Lado del exaedro conjugado

a'_6 = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_6 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_6 = Radio de la esfera inscrita.

d'_6 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_6$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

k'_6 = Apotema del polígono de una cara.

S'_6 = Superficie.

V'_6 = Volumen.

Los valores anteriores del exaedro conjugado pueden obtenerse directamente en función del lado l_8 del octaedro da-

UNE A4 210 X 297

do, ya que el valor conocido de l'_6 en función de l_8 (ver fórmula [2]), es

$$l'_6 = \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas 11 a 19 de la lámina 2, tendremos:

$$a'_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = \frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8 ; \qquad b'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = \frac{1}{3}\, l_8 ;$$

$$c'_6 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{6}\, l_8 ; \qquad d'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = \frac{1}{3}\, l_8 ;$$

$$k'_6 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{6}\, l_8 ; \qquad h'_6 = \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8$$

$$S'_6 = 6 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8\right)^2 = 6 \times \frac{2}{9}\, l_8^2 = \frac{4}{3}\, l_8^2 ; \qquad V'_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{27}\, l_8^3$$

Son útiles las siguientes relaciones de magnitudes:

a) $$\frac{l_8}{l'_6} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$ (ver fórmula [2])

b) $$\frac{S_8}{S'_6} = \frac{2\sqrt{3}\; l_8^2}{\frac{4}{3}\; l_8^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

c) $$\frac{V_8}{V'_6} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8^3}{\frac{2\sqrt{2}}{27}\, l_8^3} = \frac{9}{2}$$

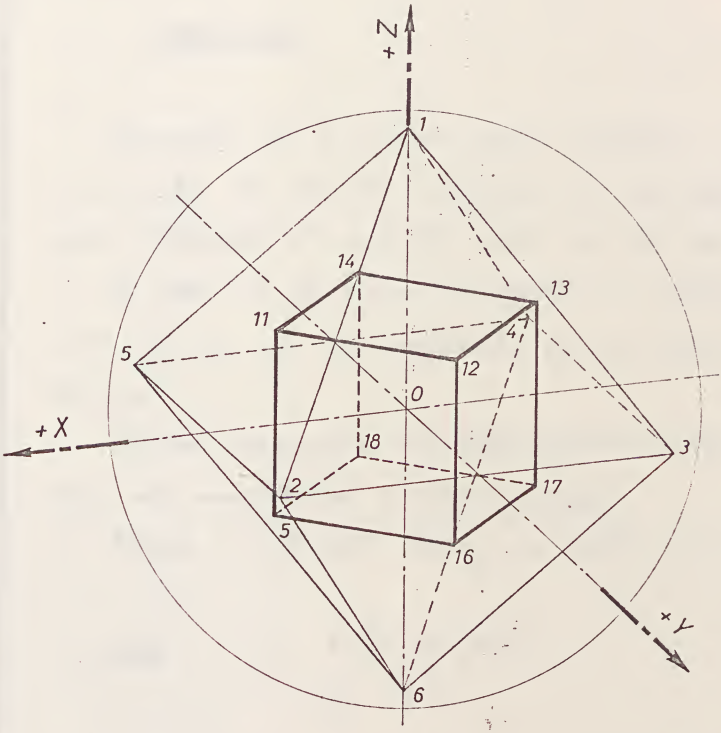
UNE A4 210 X 297

En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado	
$l'_6 = h'_6$	(80) $\frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8$	0, 47 14 05 ... l_8	+
a'_6	(81) $\frac{\sqrt{6}}{6}\, l_8$	0, 40 82 48 ... l_8	+
b'_6	(82) $\frac{1}{3}\, l_8$	0, 33 33 33 .... l_8	−
c'_6	(83) $\frac{\sqrt{2}}{6}\, l_8$	0, 23 57 02 .... l_8	+
d'_6	(84) $\frac{1}{3}\, l_8$	0, 33 33 33 .... l_8	−
$2\varphi_6$	(85) sen $\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$	sen φ = 0, 70 71 07... $2\varphi = 90°$	+
k'_6	(86) $\frac{\sqrt{2}}{6}\, l_8$	0, 23 57 02 ... l_8	+
S'_6	(87) $\frac{4}{3}\, l_8^2$	1, 33 33 33 ... l_8^2	−
V'_6	(88) $\frac{2\sqrt{2}}{27}\, l_8^3$	0, 10 47 57 .... l_8^3	+
Relaciones entre magnitudes			
$l_8 : l'_6$	(89) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$	2, 12 13 20 ...	+
$S_8 : S'_6$	(90) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	2, 59 80 76 --	+
$V_8 : V'_6$	(91) $\frac{9}{2}$	4, 50 00 00 ...	−

EUITIS BIBLIOTECA



Poliëdros regulares convexos conjugados

Lámina 9

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el icosaedro conjugado de un dodecaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al dodecaedro dado, es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

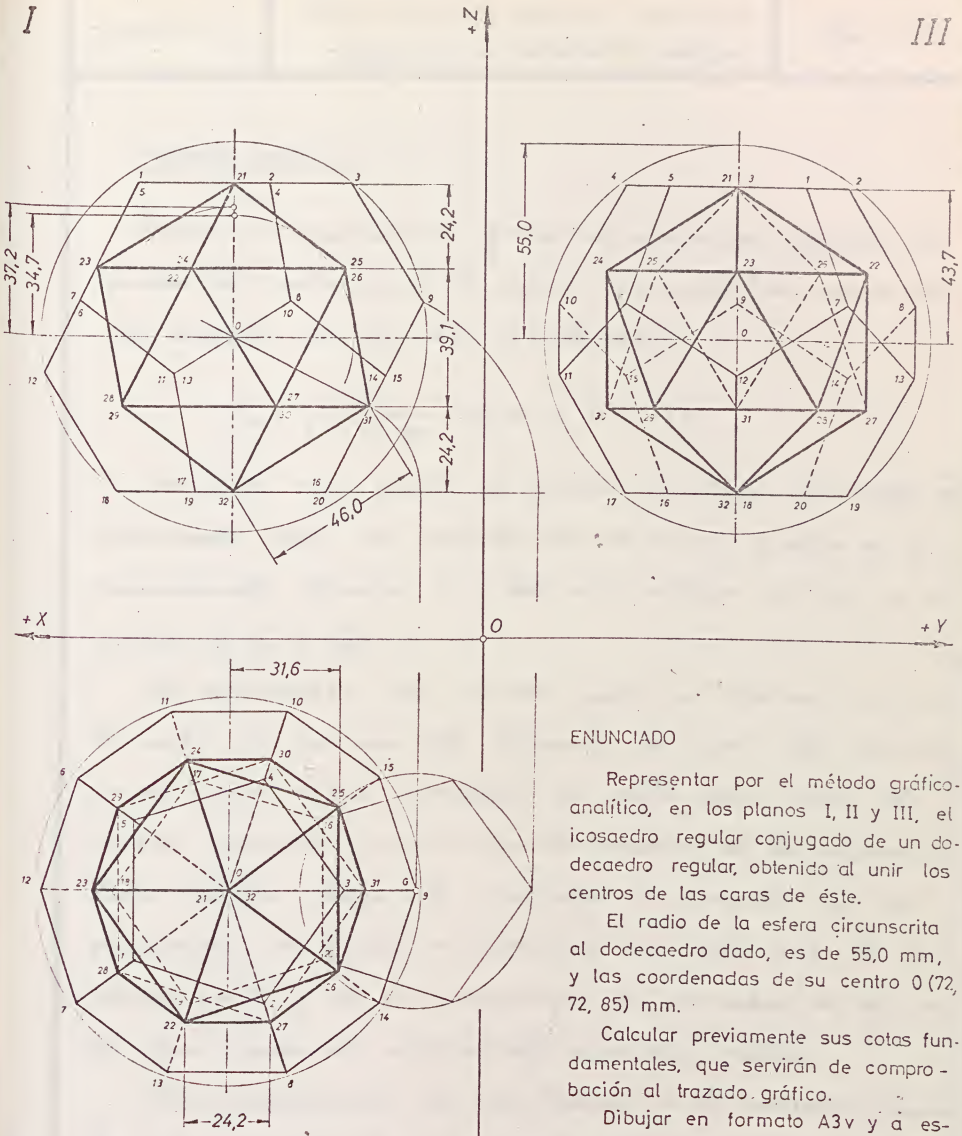
DATOS O (72, 72, 85) mm

a_{12} = 55 mm

UNE A4 210 X 297

I

III



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el icosaedro regular conjugado de un dodecaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al dodecaedro dado, es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales, que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Dodecaedro dato..... 1 al 20

Icosaedro conjugado..... 21 al 32

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 9
						Curso 19 -19

PROCESO GRÁFICO

Determínese previamente el lado del dodecaedro regular, en función del radio a de la esfera circunscrita (ver proceso gráfico-analítico de lám. 4); el lado será:

$$l_{12} = \frac{55}{1,40\ 12\ 59} = 39,\ 25\ 04\ 17 \cong 39,3$$

Tomando como punto de partida este lado, representar el dodecaedro dado, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lámina 4: Esta representación se hará en los planos I, II y III.

La representación del icosaedro pedido se efectuará uniendo los centros de las caras del dodecaedro, los cuales están situados en el espacio en la intersección de rectas que unan dos vértices consecutivos con los puntos medios de los respectivos lados opuestos. Como esta propiedad se conserva en sus proyecciones, es posible determinar en cada uno de los planos I, II y III, las proyecciones de los centros de las caras, que serán los vértices del icosaedro pedido.

Una comprobación de este trazado es la correspondencia de las proyecciones de los vértices del icosaedro al obtenerse éstos independientemente en cada proyección.

Este trazado, de laboriosa ejecución y falto de precisión por los inevitables errores gráficos, se simplifica con el proceso gráfico-analítico que a continuación exponemos.

UNE A4 210 X 297

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reducción de los errores de trazado, nos serviremos de cotas analíticas calculadas previamente de la forma siguiente.

Observemos previamente que la esfera inscrita en el dodecaedro dado, es concéntrica con la circunscrita, siendo aquélla a su vez tangente a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por consiguiente, calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al dodecaedro dado, que será la circunscrita del icosaedro conjugado.

Así pues, y teniendo en cuenta el cálculo de la lámina 4ª, se verificará:

$$c_{12} = a'_{20} = 1.11\ 35\ 16 \times 39,25\ 04\ 17 = 43,70\ 59\ 53 \cong 43,7 \text{ mm}$$

y por consiguiente, el lado del icosaedro conjugado (fig. 5), valdrá

$$l'_{20} = \frac{43.70\ 59\ 53}{0.95\ 10\ 57} = 45,95\ 51\ 36 \cong 46,0 \text{ mm}$$

con cuyo valor podemos calcular los restantes del icosaedro conjugado que se expresan a continuación:

$a'_{20} = 0,95\ 10\ 57 \times 45,95\ 51\ 36 = 43,7$ mm

$b'_{20} = 0,80\ 90\ 17 \times$ id $= 37,2$ "

$c'_{20} = 0,75\ 57\ 61 \times$ id $= 34,7$ "

$d'_{20} = 0,57\ 73\ 50 \times$ id $= 26,5$ "

$e'_{20} = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 39,1$ "

$2\varphi_{20} = 138°\ 11'\ 23''$

UNE A4 210 X 297

$f'_{20} = 0{,}85\ 06\ 51 \times 45{,}95\ 51\ 36 = 39{,}1$ mm

$g'_{20} = 0{,}52\ 57\ 31 \times$ id $= 24{,}2$ "

$h'_{20} = 0{,}68\ 81\ 91 \times$ id $= 31{,}6$ "

$i'_{20} = 0{,}52\ 57\ 31 \times$ id $= 24{,}2$ "

$k'_{20} = 0{,}28\ 86\ 75 \times$ id $= 13{,}3$ "

con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$g'_{20} = i'_{20} = 24{,}2$ mm $\qquad 2k'_{20} = d'_{20} = 2 \times 13{,}3 = 26{,}5 \qquad e'_{20} = f'_{20} = 39{,}1$ mm

$$g'_{20} + f'_{20} = 2h'_{20} = 24{,}2 + 39{,}1 = 2 \times 31{,}6 = 63{,}2 \text{ mm.}$$

La relación entre los radios de las esferas circunscritas al dodecaedro dado y al conjugado de éste, será la misma que la existente entre los radios de las esferas circunscrita e inscrita al dodecaedro dado, cuyos valores son:

$$a_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l_{12} \qquad c_{12} = a'_{20} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12}$$

y por consiguiente:

$$\frac{a_{12}}{c_{12}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l_{12} : \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12} = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}} =$$

$$= 1{,}25\ 84\ 09 \ldots \qquad [1]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$\frac{a_{12}}{c_{12}} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l_{12} : \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}} =$$

UNE A4 210 X 297

$$= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}} = \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}{2\times\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} = \frac{5(\sqrt{15}+\sqrt{3})\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}{25+11\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5(\sqrt{15}+\sqrt{3})(25-11\sqrt{5})\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}{25^2-11^2\times 5} = \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})(25-11\sqrt{5})\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}{4} =$$

$$= \frac{(25\sqrt{15}+25\sqrt{3}-55\sqrt{3}-11\sqrt{15})\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}}{4} = \frac{14\sqrt{15}-30\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{15}-15\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{(7\sqrt{15}-15\sqrt{3})^2\times(25+11\sqrt{5})}{40}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(7^2\times 15+15^2\times 3-2\times 7\times 15\times 3\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{40}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(7^2\times 3+15\times 3\times 3-2\times 7\times 3\times 3\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{8}} = \sqrt{\frac{(222-126\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{8}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(141-63\sqrt{5})(25+11\sqrt{5})}{4}} = \sqrt{\frac{3525-1575\sqrt{5}+1551\sqrt{5}-3465}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{60-24\sqrt{5}}{4}} = \boxed{\sqrt{15-6\sqrt{5}}} \cong 1,25\,84\,09\ldots$$

El lado l'_{20} del icosaedro conjugado, en función del lado l_{12} del dodecaedro dado, será pues:

UNE A4 210 X 297

$$a_{12} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}\, l_{12} \qquad c_{12} = a'_{20} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12}$$

de donde

$$l'_{20} = a'_{20} : \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12} : \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} \cong$$

$$\cong 1.\ 17\ 08\ 20 \ldots\, l_{12} \qquad [2]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$l'_{20} = \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12} : \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40}}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\, l_{12} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{40} : (10 + 2\sqrt{5})}\, l_{12} = 2 : \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10\,(10 + 2\sqrt{5})}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{10} \times \frac{25 + 11\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{2}{5} \times \frac{(25 + 11\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})}{100 - 20}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} \times \frac{250 + 110\sqrt{5} - 50\sqrt{5} - 110}{40}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{1}{5} \times \frac{140 + 60\sqrt{5}}{40}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} \times \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{10}}\, l_{12} = \frac{\sqrt{7 + 3\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}\, l_{12} = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{10}}\, l_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{9}{2} \times 10} + \sqrt{\frac{5}{2} \times 10}}{10}\, l_{12} = \frac{\sqrt{45} + \sqrt{25}}{10}\, l_{12} = \boxed{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\, l_{12}}$$

UNE A4 210 X 297

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene el icosaedro conjugado por acoplamiento de 20 triángulos equiláteros de 46,0 mm de lado, situado interiormente en un dodecaedro regular formado por 12 caras pentagonales (transparentes) de 39,3 mm de lado, de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_{20} = Lado del icosaedro conjugado

a'_{20} = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_{20} = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_{20} = Radio de la esfera inscrita.

d'_{20} = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_{20}$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

e'_{20} = Radio de la circunferencia circunscrita a un pentágono regular de lado l'_{20}, y también al decágono regular de lado i'_{20}, contorno de la vista II.

f'_{20} = Altura intermedia del contorno de las vistas I y III.

g'_{20} = Alturas extremas del contorno de las vistas I y III.

h'_{20} = Apotema de un pentágono regular de lado l'_{20}.

UNE A4 210 X 297

l'_{20} = Lado del decágono regular, contorno de la vista II.

k'_{20} = Apotema del polígono de una cara.

S'_{20} = Superficie.

V'_{20} = Volumen.

Los valores anteriores del icosaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_{12} del dodecaedro dado, ya que el valor conocido de l'_{20} en función de l_{12} (ver fórm. [2]), es

$$l'_{20} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12}$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas 43 a 55 de la lámina 5, tendremos:

$$a'_{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) l_{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} =$

$$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}}{40}\, l_{12} = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}}{40}\, l_{12} =$$

$$= \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})\cdot(70+30\sqrt{5})}}{40}\, l_{12} = \frac{\sqrt{2\times 10\times(5+\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}}{40}\, l_{12} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5\times(35+7\sqrt{5}+15\sqrt{5}+15)}}{40}\, l_{12} = \frac{\sqrt{5\times(50+22\sqrt{5})}}{20}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{10\times(25+11\sqrt{5})}{400}}\, l_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\, l_{12}}$$

UNE A4 210 X 297

$$b'_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \frac{5+2\sqrt{5}}{10}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} =$

$$= \frac{5+5\sqrt{5}+3\sqrt{5}+15}{40}\, l_{12} = \frac{20+8\sqrt{5}}{40}\, l_{12} = \boxed{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\, l_{12}}$$

$$c'_{20} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \frac{7\sqrt{15}+15\sqrt{3}}{60}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} =$

$$= \frac{15\sqrt{3}+5\sqrt{15}+9\sqrt{15}+15\sqrt{3}}{120}\, l_{12} = \frac{30\sqrt{3}+14\sqrt{15}}{120}\, l_{12} = \boxed{\frac{7\sqrt{15}+15\sqrt{3}}{60}\, l_{12}}$$

$$d'_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{30}\, l_{12}$$

$$e'_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}{1000}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}{1000}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{10\times(5+\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{1000}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{35+7\sqrt{5}+15\sqrt{5}+15}{100}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{100}}\, l_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}}\, l_{12}}$$

$$f'_{20} = e'_{20} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}}\, l_{12}$$

$$g'_{20} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\, l_{12}$$

UNE A4 210 X 297

Desarrollo del cálculo anterior: $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}{1000}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}{1000}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(70+30\sqrt{5})}{1000}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{100}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{35-7\sqrt{5}+15\sqrt{5}-15}{100}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{100}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{4\times(5+2\sqrt{5})}{100}}\, l_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\, l_{12}}$$

$$h'_{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{2}}\, l_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})^2}{2000}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(25+45+30\sqrt{5})}{2000}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(70+30\sqrt{5})}{2000}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{200}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{35+14\sqrt{5}+15\sqrt{5}+30}{200}}\, l_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{200}}\, l_{12} = \boxed{\frac{1}{10}\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{2}}\, l_{12}}$$

$$i'_{20} = g'_{20} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\, l_{12}$$

$$k'_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12} = \frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{60}\, l_{12}$$

$$S'_{20} = 5\sqrt{3} \times \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12}\right)^2 = \frac{3\sqrt{15}+7\sqrt{3}}{2}\, l_{12}^2$$

$$V'_{20} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12}\right)^3 = \frac{105+47\sqrt{5}}{60}\, l_{12}^3$$

UNE A4 210 X 297

Desarrollo de los dos últimos cálculos:

$$S'_{20} = 5\sqrt{3} \times \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12}\right)^2 = \frac{5\sqrt{3}\times(5+3\sqrt{5})^2}{100}\, l_{12}^2 = \frac{5\sqrt{3}\times(25+45+30\sqrt{5})}{100}\, l_{12}^2$$

$$= \frac{5\sqrt{3}\times(70+30\sqrt{5})}{100}\, l_{12}^2 = \frac{5\sqrt{3}\times(7+3\sqrt{5})}{10}\, l_{12}^2 = \frac{\sqrt{3}\times(7+3\sqrt{5})}{2}\, l_{12}^2 =$$

$$= \boxed{\frac{3\sqrt{15}+7\sqrt{3}}{2}\, l_{12}^2}$$

$$V'_{20} = \frac{15+5\sqrt{5}}{12} \times \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\, l_{12}\right)^3 = \frac{(15+5\sqrt{5})(5+3\sqrt{5})\,(5+3\sqrt{5})^2}{12\times 10^3}\, l_{12}^3 =$$

$$= \frac{(75+22\sqrt{5}+45\sqrt{5}+75)(25+45+30\sqrt{5})}{12\,000}\, l_{12}^3 = \frac{(150+70\sqrt{5})(70+30\sqrt{5})}{12\,000}\, l_{12}^3 =$$

$$= \frac{(15+7\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{120}\, l_{12}^3 = \frac{105+49\sqrt{5}+45\sqrt{5}+105}{120}\, l_{12}^3 = \frac{210+94\sqrt{5}}{120}\, l_{12}^3 =$$

$$= \boxed{\frac{105+47\sqrt{5}}{60}\, l_{12}^3}$$

Son útiles las siguientes relaciones:

a) $\dfrac{l_{12}}{l'_{20}} = \dfrac{1}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}} = \dfrac{3\sqrt{5}-5}{2}$ (ver fórmula [2]

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{l_{12}}{l'_{20}} = \frac{1}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}} = \frac{10}{3\sqrt{5}+5} = \frac{10\,(3\sqrt{5}-5)}{45-25} = \frac{10\,(3\sqrt{5}-5)}{20} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$$

UNE A4 210 X 297

b) $$\frac{S_{12}}{S'_{20}} = \frac{3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ \ell_{12}^2}{\frac{7\sqrt{3}+3\sqrt{15}}{2}\ \ell_{12}^2} = \sqrt{\frac{15\times(25-11\sqrt{5})}{2}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $$\frac{S_{12}}{S'_{20}} = \frac{3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ \ell_{12}^2}{\frac{7\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{2}\ \ell_{12}^2} =$$

$$= \frac{6\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{7\sqrt{3}+3\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{(25+10\sqrt{5})(7\sqrt{3}-3\sqrt{15})^2}}{147-135} =$$

$$= \frac{6\sqrt{(25+10\sqrt{5})(147+135-42\sqrt{45})}}{12} = \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})(282-42\times3\sqrt{5})}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6(25+10\sqrt{5})(47-21\sqrt{5})}}{2} = \frac{\sqrt{6\times(1175+470\sqrt{5}-525\sqrt{5}-1050}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6\times(125-55\sqrt{5})}}{2} = \frac{\sqrt{30\times(25-11\sqrt{5})}}{2} = \sqrt{\frac{30}{4}\times(25-11\sqrt{5})} = \boxed{\sqrt{\frac{15\times(25-11\sqrt{5})}{2}}}$$

c) $$\frac{V_{12}}{V'_{20}} = \frac{\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\ \ell_{12}^3}{\frac{105+47\sqrt{5}}{60}\ \ell_{12}^3} = \frac{15\times(7-3\sqrt{5})}{2}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\frac{V_{12}}{V'_{20}} = \frac{\frac{7\sqrt{5}+15}{4}\ \ell_{12}^3}{\frac{105+47\sqrt{5}}{60}\ \ell_{12}^3} = \frac{60\times(7\sqrt{5}+15)}{4\times(105+47\sqrt{5})} = \frac{15\times(7\sqrt{5}+15)(105-47\sqrt{5})}{105^2-(47\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{15\times(7\sqrt{5}+15)(105-47\sqrt{5})}{11025-11045} = \frac{15\times(7\sqrt{5}+15)(47\sqrt{5}-105)}{20} =$$

$$= \frac{15\times(1645+705\sqrt{5}-735\sqrt{5}-1575)}{20} = \frac{15\times(70-30\sqrt{5})}{20} = \boxed{\frac{15\times(7-3\sqrt{5})}{2}}$$

UNE A4 210 X 297

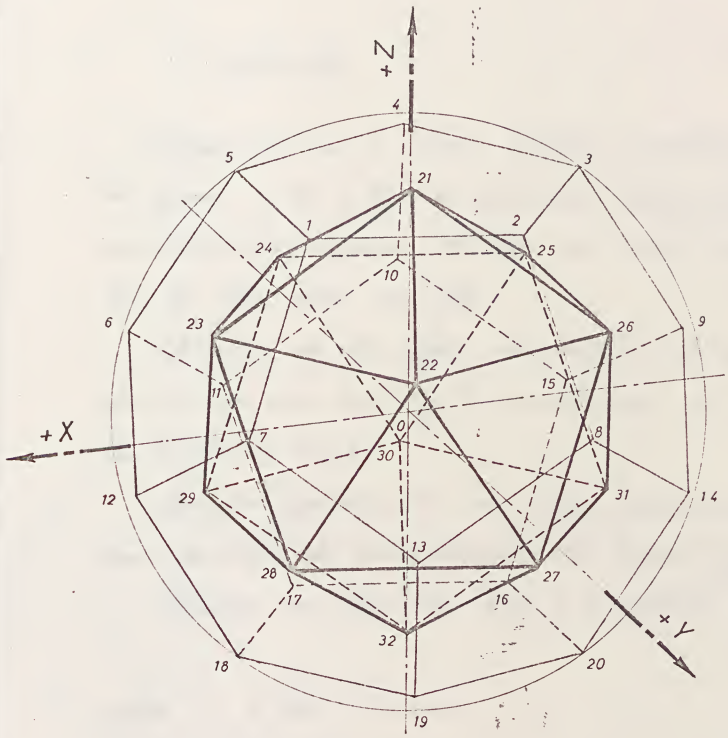
En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(92) l'_{20}	$\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\ l_{12}$	1. 17 08 20 ... l_{12}
(93) a'_{20}	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\ l_{12}$	1. 11 35 16 ... l_{12}
(94) b'_{20}	$\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\ l_{12}$	0. 94 72 14 ... l_{12}
(95) c'_{20}	$\frac{7\sqrt{15}+15\sqrt{3}}{60}\ l_{12}$	0. 88 48 61 ... l_{12}
(96) d'_{20}	$\frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{30}\ l_{12}$	0. 67 59 73 ... l_{12}
(97) e'_{20}	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}}\ l_{12}$	0. 99 59 59 ... l_{12}
(98) f'_{20}	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{50}}\ l_{12}$	0. 99 59 59 ... l_{12}
(99) g'_{20}	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\ l_{12}$	0. 61 55 37 ... l_{12}
(100) h'_{20}	$\frac{1}{10}\times\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{2}}\ l_{12}$	0. 80 57 48 ... l_{12}
(101) i'_{20}	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\ l_{12}$	0. 61 55 37 ... l_{12}
(102) k'_{20}	$\frac{3\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{60}\ l_{12}$	0. 33 79 87 ... l_{12}
(103) $2\varphi_{20}$	$\text{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$	sen φ_{20} = 0. 93 41 72 ... $2\varphi_{20}$ = 138° 11' 22,8"
(104) S'_{20}	$\frac{3\sqrt{15}+7\sqrt{3}}{2}\ l_{12}^2$	11. 87 16 53 ... l_{12}^2
(105) V'_{20}	$\frac{105+47\sqrt{5}}{60}\ l_{12}^3$	3. 50 15 87 ... l_{12}^3
Relaciones entre magnitudes		
$l_{12} : l'_{20}$	$\frac{3\sqrt{5}-5}{2}$	(106) 0. 85 41 02 ...
$S_{12} : S'_{20}$	$\sqrt{\frac{15\times(25-11\sqrt{5})}{2}}$	(107) 1. 73 90 78 ...
$V_{12} : V'_{20}$	$\frac{15\times(7-3\sqrt{5})}{2}$	(108) 2. 18 84 71 ...

EUITIS BIBLIOTECA

UNE A4 210 X 297



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 10

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el dodecaedro conjugado de un icosaedro regular, obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al icosaedro es de 55,0 mm, y las coordenadas de su centro O (72, 72, 85) mm.

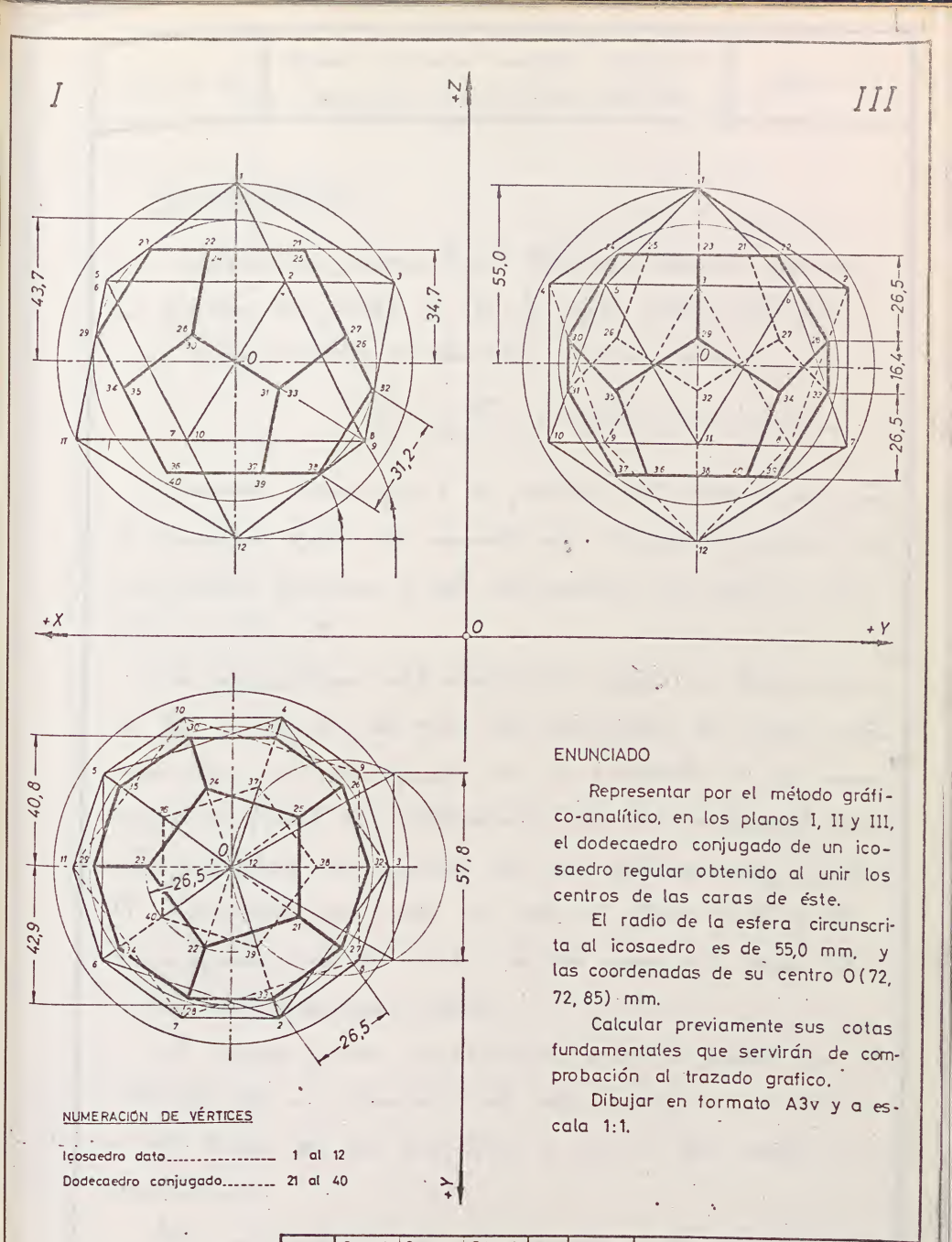
Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

a_{20} = 55,0 mm.

UNE A4 210 X 297



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el dodecaedro conjugado de un icosaedro regular obtenido al unir los centros de las caras de éste.

El radio de la esfera circunscrita al icosaedro es de 55,0 mm. y las coordenadas de su centro O(72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado grafico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Icosaedro dato..... 1 al 12

Dodecaedro conjugado..... 21 al 40

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 10
						Curso 19 -19

PROCESO GRÁFICO

Determinar previamente el lado del icosaedro regular, en función del radio a de la esfera circunscrita (ver proceso gráfico-analítico de lám. 5); el lado será:

$$l_{20} = \frac{55}{0,95\ 10\ 57..} = 57,83\ 03\ 93 \cong 57,8 \text{ mm}$$

Tomando como punto de partida este lado, representar el icosaedro dato, de acuerdo con el proceso gráfico de la mencionada lámina 5. Esta representación se hará en los planos I, II y III.

La representación del dodecaedro pedido se hará uniendo los centros de las caras del icosaedro, los cuales están situados en el espacio en el baricentro de su cara respectiva (punto de intersección de las medianas); como esta propiedad se conserva en sus proyecciones, es posible determinar en cada uno de los planos I, II y III las proyecciones de los centros de las caras, que serán los vértices del dodecaedro pedido.

El trazado puede simplificarse teniendo presente que el baricentro de un triángulo está sobre cualquier mediana a dos tercios de su longitud a partir del vértice correspondiente.

Una comprobación de este trazado es la correspondencia de las proyecciones de los vértices del dodecaedro al

obtenerse éstos independientemente en cada proyección.

Este trazado puede resultar penoso y falto de precisión por lo que es conveniente simplificarlo con el proceso gráfico-analítico.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para la reducción de errores de trazado nos serviremos de cotas analíticas calculadas previamente en la forma que a continuación exponemos.

Observemos previamente que la esfera inscrita en el icosaedro regular es concéntrica con la circunscrita, siendo aquélla tangente a las caras del mismo en sus centros respectivos. Por consiguiente calcularemos previamente el radio de la esfera inscrita al icosaedro dado, que será el de la circunscrita del dodecaedro pedido.

Así pues tendremos que

$$c_{20} = a'_{12}$$

mas teniendo en cuenta el cálculo de la lámina 5ª, se verificará:

$$c_{20} = 0,75\ 57\ 61\ l_{20} = 0,75\ 57\ 61 \times 57,83\ 03\ 93 =$$

$$= 43,70\ 59\ 53..\ mm = a_{12}$$

El lado del dodecaedro conjugado (ver figura 41, será

$$l'_{12} = \frac{43,70\ 59\ 53}{1,40\ 12\ 59} = 31,19\ 04\ 88..\ mm$$

con cuyo valor podemos calcular los restantes del dodecae-

dio que se expresan a continuación:

$a'_{12} = 1.40\ 12\ 59 \times 31,19\ 04\ 88 = 43.7$ mm ✓

$b'_{12} = 1,30\ 90\ 17 \times$ id. $= 40,8$ " ✓

$c'_{12} = 1.11\ 35\ 16 \times$ id $= 34,7$ " ✓

$d'_{12} = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 26,5$ " ✓

$2\varphi_{12} = 116°\ 33'\ 54''$ ✓

$e'_{12} = 1,37\ 63\ 84 \times$ id $= 42,9$ "

$f'_{12} = 0,52\ 57\ 31 \times$ id $= 16,4$ " ✓

$g'_{12} = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 26,5$ " ✓

$i'_{12} = 0,85\ 06\ 51 \times$ id $= 26,5$ " ✓

$k'_{12} = 0,68\ 81\ 92 \times$ id $= 21,45$ " ✓

Con estos valores se verifican las siguientes relaciones:

$d'_{12} = g'_{12} = i'_{12} = 26,5$ mm

$g'_{12} + f'_{12} = 2k \qquad 26,5 + 16,4 = 2 \times 21,45 = 42,9$ mm

---

La relación entre los radios de las esferas circunscritas al icosaedro y dodecaedro conjugados, será:

$$\left.\begin{aligned} a_{20} &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20} \cong 0,95\ 10\ 57\ldots l \\ a'_{12} = c_{20} &= \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20} \cong 0,75\ 57\ 61\ldots l \end{aligned}\right\} \text{ de donde}$$

$$\frac{a_{20}}{a'_{12}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20} : \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20} = \sqrt{15-6\sqrt{5}} =$$

$$= 1,25\ 84\ 09\ldots \qquad [1]$$

UNE A4 210 X 297

El desarrollo del cálculo anterior es el siguiente:

$$\frac{a_{20}}{a'_{12}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20} : \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20} = \frac{12\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)} =$$

$$= \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{3\sqrt{3}+\sqrt{15}} = \frac{3\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)}{27-15} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})\left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}\right)^2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})\left(27+15-6\sqrt{45}\right)}}{4} = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})\left(42-18\sqrt{5}\right)}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{420+84\sqrt{5}-180\sqrt{5}-2\times 18\times 5}}{4} = \frac{\sqrt{240-96\sqrt{5}}}{4} = \sqrt{\frac{240-96\sqrt{5}}{16}} =$$

$$= \boxed{\sqrt{15-6\sqrt{5}}} \cong 1,\ 25\ 84\ 09\ldots$$

El lado l'_{12} del dodecaedro conjugado, en función del lado l_{20} del icosaedro dado, será pues:

$$a_{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20} \qquad c_{20} = a'_{12} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20}$$

de donde

$$l'_{12} = a'_{12} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, l_{20} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = 0,\ 53\ 93\ 50\ldots \qquad [2]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$l'_{12} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20} : \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} = \frac{4\times(3\sqrt{3}+\sqrt{15})}{12\times(\sqrt{15}+\sqrt{3})}\, l_{20} =$$

$$= \frac{(3\sqrt{3}+\sqrt{15})(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{3\times(15-3)}\, l_{20} = \frac{3\times\sqrt{3\times3\times5}+15-3\times3-\sqrt{3\times3\times5}}{36}\, l_{20} =$$

$$= \frac{6+9\sqrt{5}-3\sqrt{5}}{36}\, l_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} \cong 0{,}53\ 93\ 50\ldots\ l_{20}$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene el dodecaedro conjugado por acoplamiento de 12 pentágonos regulares de 31,2 mm de lado, situado interiormente en un icosaedro regular formado por 20 caras triangulares (transparentes) de 57,8 mm de lado, de forma que los vértices del primero estén en los centros de las caras del segundo.

UNE A4 210 X 297

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_{12} = Lado del dodecaedro conjugado

a'_{12} = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_{12} = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_{12} = Radio de la esfera inscrita.

d'_{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_{12}$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

e'_{12} = Radio de la circunferencia circunscrita al decágono regular, contorno de la vista II.

f'_{12} = Altura intermedia del contorno de las vistas I y III.

g'_{12} = Alturas extremas del contorno de las vistas I y III.

i'_{12} = Lado del decágono regular, contorno de la vista II.

k'_{12} = Apotema del polígono de una cara

S'_{12} = Superficie.

V'_{12} = Volumen.

Los valores anteriores del dodecaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_{20} del icosaedro dado, ya que el valor conocido de l'_{12} en función de l_{20} (ver fórm. [2]) es

$$l'_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20}$$

UNE A4 210 X 297

Sustituyendo este valor en las fórmulas 30 al 41 de la lámina 4, tendremos:

$$a'_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}\right) l_{20} = \frac{\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{12}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $a'_{20} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} =$

$$= \frac{(\sqrt{15}+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}{24}\, l_{20} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{75}+\sqrt{15}}{24}\, l_{20} = \frac{2\sqrt{15}+\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{24}\, l_{20} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15}+6\sqrt{3}}{24}\, l_{20} = \boxed{\frac{\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{12}\, l_{20}}$$

$$b'_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = \frac{2+\sqrt{5}}{6}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $b'_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = \frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{24}\, l_{20} =$

$$= \frac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{24}\, l_{20} = \frac{8+4\sqrt{5}}{24}\, l_{20} = \boxed{\frac{2+\sqrt{5}}{6}\, l_{20}}.$$

$$c'_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $c'_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(1+\sqrt{5})^2}{40 \times 6^2}} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(1+5+2\sqrt{5})}{40}}\, l_{20} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(6+2\sqrt{5})}{40}}\, l_{20} = \frac{1}{6} \times \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(3+\sqrt{5})}{20}}\, l_{20} =$$

UNE A4 210 X 297

$$= \frac{1}{6}\sqrt{\frac{33\sqrt{5}+75+55+25\sqrt{5}}{20}}\, l_{20} = \frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{130+58\sqrt{5}}{20}}\, l_{20} = \boxed{\frac{1}{6}\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}}$$

$$d'_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $d'_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{10\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{10\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{10\times 6^2}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5}{5\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{20+8\sqrt{5}}{5\times 6^2}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5\times 3^2}}\, l_{20} = \boxed{\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{20}}$$

$$e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $e'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{5\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5\times 3\times 6}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{5\times 6}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10\times 3^2}}\, l_{20} = \boxed{\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}}$$

$$f'_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $f'_{12} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} \times \frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} =$

UNE A4 210 X 297

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{10\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{10\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{10\times 6^2}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{5\times 6^2}}\, l_{20} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5\times 6^2}}\, l_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5\times 3\times 6}}\, l_{20} = \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}}$$

$$g'_{12} = i'_{12} = d'_{12} = \frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\, l_{20}$$

$$k'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\times\frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} = \frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $k'_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\times\frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20} =$

$$= \frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{20}}\, l_{20} = \frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{20}}\, l_{20} =$$

$$= \frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}{20}}\, l_{20} = \frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{10}}\, l_{20} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{15+6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+10}{10}}\, l_{20} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\, l_{20}}$$

$$S'_{12} = 3\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20}\right)^2 = \frac{1}{6}\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}\times l_{20}^2$$

Desarrollo del cálculo anterior: $S'_{12} = 3\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}\, l_{20}\right)^2 =$

$$= 3\times\sqrt{25+10\sqrt{5}}\times\frac{(1+\sqrt{5})^2}{36}\, l_{20}^2 = \sqrt{25+10\sqrt{5}}\times\frac{6+2\sqrt{5}}{12}\, l_{20}^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\times\sqrt{(25+10\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}\, l_{20}^2 = \frac{1}{6}\sqrt{(25+10\sqrt{5})(9+5+6\sqrt{5})}\, l_{20}^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(25+10\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})\times 2}\ \ell_{20}^2 = \frac{1}{6}\sqrt{(175+70\sqrt{5}+75\sqrt{5}+150)\times 2}\ \ell_{20}^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\times\sqrt{(325+145\sqrt{5})\times 2}\ \ell_{20}^2 = \frac{1}{6}\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}\ \ell_{20}^2$$

$$V'_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}\ \ell_{20}\right)^3 = \frac{65+29\sqrt{5}}{108}\ \ell_{20}^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $V'_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4}\times\left(\frac{1+\sqrt{5}}{6}\ \ell_{20}\right)^3 =$

$$= \frac{(7\sqrt{5}+15)(1+\sqrt{5})^3}{4\times 6^3}\ \ell_{20}^3 = \frac{(7\sqrt{5}+15)(1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5})}{4\times 6\times 6^2}\ \ell_{20}^3 =$$

$$= \frac{(7\sqrt{5}+15)(16+8\sqrt{5})}{4\times 6\times 6^2}\ \ell_{20}^3 = \frac{(7\sqrt{5}+15)(2+\sqrt{5})}{3\times 6^2}\ \ell_{20}^2 =$$

$$= \frac{14\sqrt{5}+30+35+15\sqrt{5}}{108}\ \ell_{20}^3 = \boxed{\frac{65+29\sqrt{5}}{108}\ \ell_{20}^3}$$

Son útiles las siguientes relaciones:

a) $\frac{\ell_{20}}{\ell'_{12}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{6}} = \frac{3\times(\sqrt{5}-1)}{2}$ (ver fórmula [2])

Desarrollo del cálculo anterior: $\frac{\ell_{20}}{\ell'_{12}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{6}} = \frac{6}{1+\sqrt{5}} =$

$$= \frac{6\times(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{6(\sqrt{5}-1)}{4} = \boxed{\frac{3\times(\sqrt{5}-1)}{2}}$$

b) $\frac{S_{20}}{S'_{12}} = \frac{5\sqrt{3}\ \ell_{20}^2}{\frac{1}{6}\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}\ \ell_{20}^2} = \frac{3\sqrt{6\times(65-29\sqrt{5})}}{2}$

UNE A4 210 X 297

Desarrollo del cálculo anterior: $\dfrac{S_{20}}{S'_{12}} = \dfrac{5\sqrt{3}\ \ell_{20}^2}{\frac{1}{6}\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}\ \ell_{20}^2} =$

$$= \frac{30\times\sqrt{3}}{\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}} = \frac{30\sqrt{3}\times\sqrt{10(65+29\sqrt{5})}}{10\times(65+29\sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{3}\ \sqrt{10(65+29\sqrt{5})}\times(65-29\sqrt{5})}{65^2-(29\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{30\ (65+29\sqrt{5})(65-29\sqrt{5})^2}}{4225-4205} = \frac{3\sqrt{30\cdot(4225-4205)(65-29\sqrt{5})}}{20} =$$

$$= \frac{3\sqrt{30\times 20\times(65-29\sqrt{5})}}{20} = \frac{3\times 10\cdot\sqrt{6\times(65-29\sqrt{5})}}{20} = \boxed{\frac{3\sqrt{6\times(65-29\sqrt{5})}}{2}}$$

c) $\dfrac{V_{20}}{V'_{12}} = \dfrac{\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\ \ell_{20}^3}{\frac{65+29\sqrt{5}}{108}\ \ell_{20}^3} = \dfrac{9\times(25-11\sqrt{5})}{2}$

Desarrollo del cálculo anterior: $\dfrac{V_{20}}{V'_{12}} = \dfrac{\frac{15+5\sqrt{5}}{12}\ \ell_{20}^2}{\frac{65+29\sqrt{5}}{108}\ \ell_{20}^2} = \dfrac{108\times(15+5\sqrt{5})}{12\times(65+29\sqrt{5})} =$

$$= \frac{9\times(15+5\sqrt{5})(65-29\sqrt{5})}{65^2-(29\sqrt{5})^2} = \frac{9\times(975+325\sqrt{5}-435\sqrt{5}-725)}{4225-4205} = \frac{9\times(250-110\sqrt{5})}{20} =$$

$$= \boxed{\frac{9\times(25-11\sqrt{5})}{2}}$$

En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados.

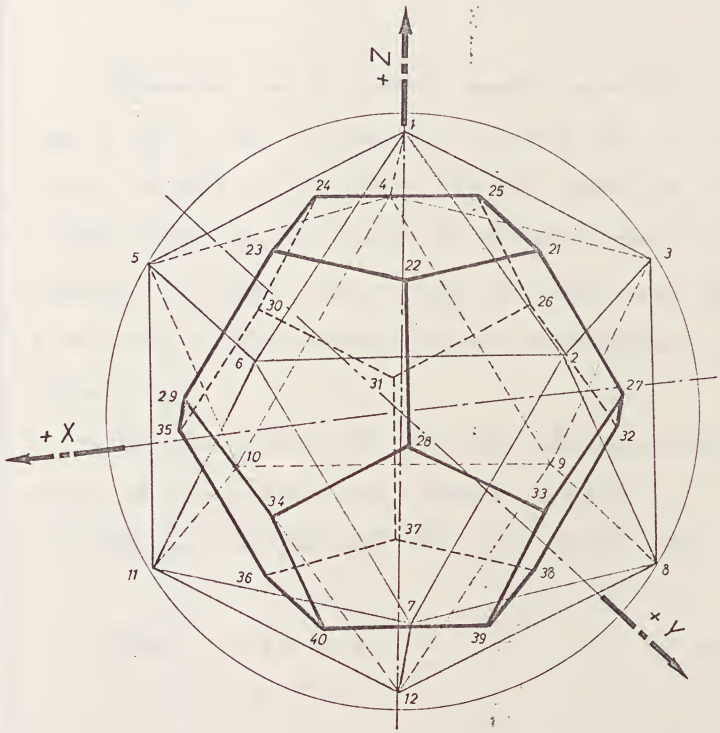
EUITIS BIBLIOTECA

UNE A4 210 X 297

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(109) l'_{12}	$\frac{1+\sqrt{5}}{6}\ l_{20}$	0, 53 93 45 ... l_{20}
(110) a'_{12}	$\frac{\sqrt{15}+3\sqrt{3}}{12}\ l_{20}$	0, 75 57 61 ... l_{20}
(111) b'_{12}	$\frac{2+\sqrt{3}}{6}\ l_{20}$	0, 70 60 11 .... l_{20}
(112) c'_{12}	$\frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{65+29\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	0, 60 05 69 ... l_{20}
(113) d'_{12}	$\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ l_{20}$	0, 45 87 94 ... l_{20}
(114) $2\varphi_{12}$	$\operatorname{sen}\varphi_{12}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$	$\operatorname{sen}\varphi_{12}=$ 0, 85 06 51... $2\varphi_{12}=$ 116° 33' 54,2"
(115) e'_{12}	$\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	0, 74 23 44 ... l_{20}
(116) f'_{12}	$\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	0. 28 35 50 .. l_{20}
(117) g'_{12}	$\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ l_{20}$	0, 45 87 94 ... l_{20}
(118) i'_{12}	$\frac{1}{3}\times\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\ l_{20}$	0. 45 87 94 ... l_{20}
(119) k'_{12}	$\frac{1}{6}\times\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}\ l_{20}$	0. 37 11 72 ... l_{20}
(120) S'_{12}	$\frac{1}{6}\times\sqrt{10\times(65+29\sqrt{5})}\ l_{20}^2$	6, 00 56 91 ... l_{20}^2
(121) V'_{12}	$\frac{65+29\sqrt{5}}{108}\ l_{20}^3$	1, 20 22 78 ... l_{20}^3
Relaciones entre magnitudes		
$l_{20} : l'_{12}$	$\frac{3\times(\sqrt{5}-1)}{2}$	(122) 1, 85 41 02 ...
$S_{20} : S'_{12}$	$\frac{3\times\sqrt{6\times(65-29\sqrt{5})}}{2}$	(123) 1, 44 20 08 ...
$V_{20} : V'_{12}$	$\frac{9\times(25-11\sqrt{5})}{2}$	(124) 1, 81 46 35 ...

UNE A4 210 X 297



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 11

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el tetraedro conjugado de un tetraedro regular de 89.8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del tetraedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son O (72, 72, 85) mm.

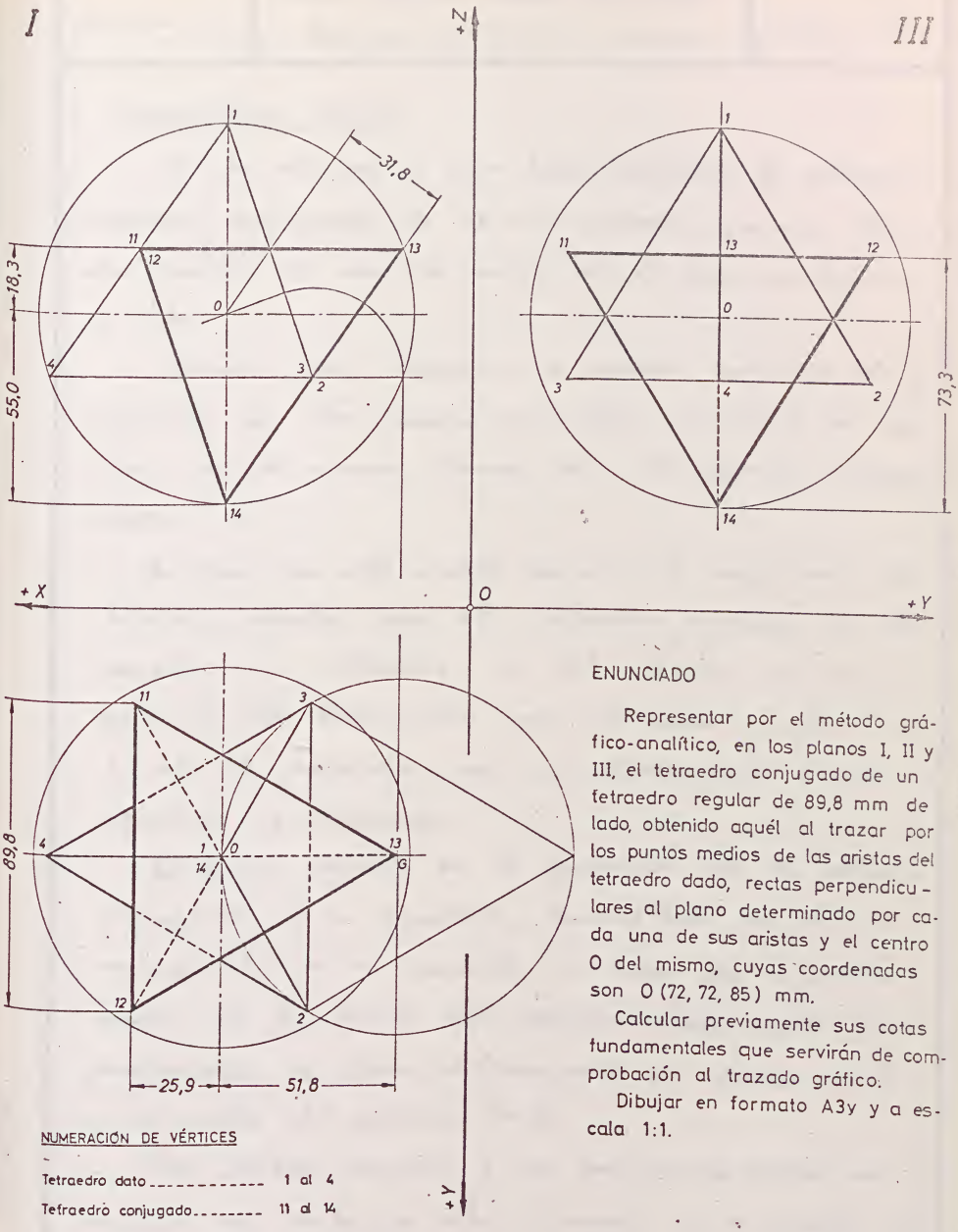
Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3x y a escala 1:1

DATOS O (72, 72, 85) mm

$l_4 = 89,8$

UNE A4 210 X 297



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el tetraedro conjugado de un tetraedro regular de 89,8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del tetraedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son O (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3y y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dato ..... 1 al 4

Tetraedro conjugado ..... 11 al 14

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 11
						Curso 19 - 19

II

CONSIDERACIONES PREVIAS

En las láminas 6 a 10 hemos estudiado los poliedros regulares conjugados de los cinco poliedros regulares, obtenidos aquéllos al unir los centros de dos caras contiguas de éstos.

También pueden deducirse los poliedros conjugados de los regulares, por otros procesos geométricos distintos al anterior, con las mismas formas, pero de diferentes dimensiones.

Así pues, en estos nuevos procesos, el conjugado del tetraedro regular será otro tetraedro regular; el del exaedro, un octaedro; el del octaedro, un exaedro; el del dodecaedro, un icosaedro y, finalmente, el del icosaedro, será un dodecaedro (todos regulares y convexos).

El proceso seguido en la generación de los poliedros conjugados de los regulares, desarrollado en las láminas 11-13-14-16-17, consiste en trazar por los puntos medios de las aristas del poliedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas y el centro del poliedro dado.

Cada poliedro regular y su conjugado tendrán pues comunes su centro y la esfera tangente a las aristas de ambos.

UNE A4 210 X 297

El poliedro conjugado de un tetraedro regular, es otro tetraedro también regular.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado, es a su vez igual al dado y las aristas de ambos, a más de ser iguales y perpendiculares, se cortan en sus respectivos puntos medios. Por consiguiente, el centro O del tetraedro dado y del tetraedro conjugado, es común y la esfera circunscrita al primero lo es a su vez al segundo; igual ocurre con la esfera tangente a las aristas y la inscrita.

Estas propiedades simplifican notablemente el trazado gráfico.

PROCESO GRÁFICO

Determinar previamente el radio $\underline{r}$ de la esfera circunscrita al tetraedro dado (ver proceso gráfico-analítico de la lám. 1); el radio $\underline{a}$ será:

$$a_4 = 0,61\ 23\ 72 \times 89.8 = 55,0 \text{ mm}$$

Tomando como punto de partida el centro O en el plano II, y conocido el lado, la construcción de la proyección sobre II del tetraedro dado 1-2-3-4 es inmediata. En el plano I determínese el punto 4 sobre la esfera circunscrita, que dista del 1 la magnitud del lado dado, con lo cual se completa dicha proyección. La proyección sobre III, se deduce de la I y la II.

UNE A4 210 X 297

La representación del tetraedro conjugado es simétrica del dado con respecto al centro O de la esfera circunscrita, cuya propiedad se conserva en sus proyecciones; ello permite completar la figura con el conjugado pedido.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas en la figura, referente al poliedro conjugado, es idéntico al desarrollado en la lámina 1, cuyos valores reproducimos, tomando como exacto el radio de la esfera circunscrita, con 55 mm.

$l'_4 = 55 : 0,61\ 23\ 72 \ldots = 89,81\ 46\ 88 \ldots$ mm

$a'_4 = 0.61\ 23\ 72 \times 89.81\ 46\ 88 = 55,0$ mm

$b'_4 = 0,35\ 35\ 53 \times$ id $= 31,8$ "

$c'_4 = 0.20\ 41\ 24 \times$ id $= 18,3$ "

$d'_4 = 0,57\ 73\ 50 \times$ id $= 51,8$ "

$2\varphi_4 = 70° 31' 43''$

$k'_4 = 0,28\ 86\ 75 \times$ id $= 25,9$ "

$h'_4 = 0,81\ 64\ 97 \times$ id $= 73,3$ "

FIGURA CORPÓREA

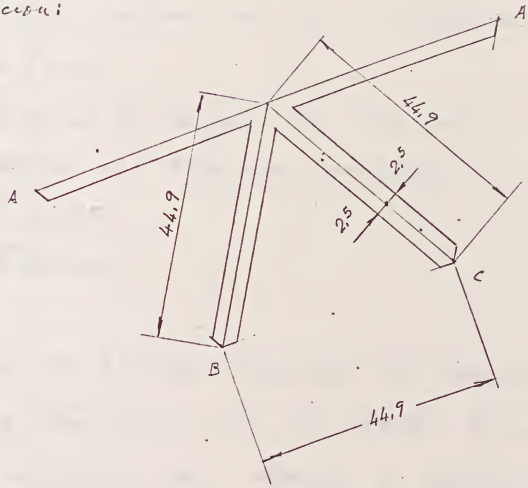
El tetraedro conjugado se obtiene por acoplamiento de 4 triángulos equiláteros de 89.8 mm de lado.

El tetraedro dado se obtiene formando previamente 4 pirámides triangulares (transparentes y sin base), cuyas

UNE A4 210 X 297

caras laterales son triángulos equiláteros de 44,9 mm de lado (mitad del lado dato); estas pirámides se acoplarán sobre cada una de las cuatro caras del conjugado de forma que sus vértices estén en los puntos medios de las aristas de aquél.

También puede obtenerse el tetraedro dado, sustituyendo las caras transparentes de las 4 pirámides triangulares, por las obtenidas según el trazado que se representa a continuación:



Estas cuatro pirámides se acoplarán al tetraedro conjugado, colocando sus vértices A, B, C, en los puntos medios de las aristas.

UNE A4 210 X 297

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada:

l'_4 = Lado del tetraedro conjugado

a'_4 = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_4 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_4 = Radio de la esfera inscrita

d'_4 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_4$ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

k'_4 = Apotema del polígono de una cara

h'_4 = Altura del tetraedro conjugado

S'_4 = Superficie.

V'_4 = Volumen.

Siendo el tetraedro conjugado del tetraedro regular, de igual dimensión que el dado, los valores del cuadro sinóptico que damos a continuación, son iguales a los dados en el de la lámina 1.

UNE A4 210 X 297

CUADRO SINÓPTICO

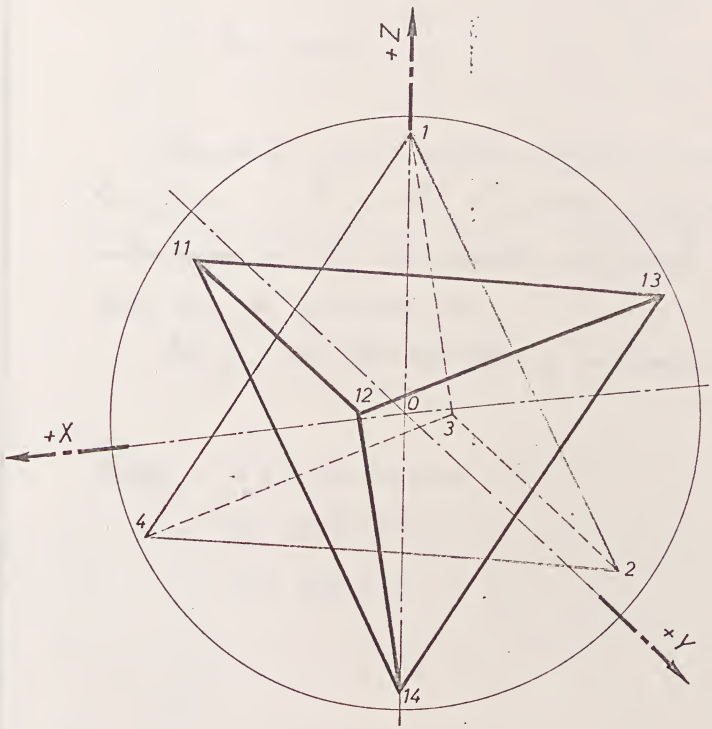
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l'_4	(125) $1 \cdot l_4$	$1,00\ 00\ 00 \ldots l_4$
a'_4	(126) $\frac{\sqrt{6}}{4} l_4$	$0,61\ 23\ 72 \ldots l_4$
b'_4	(127) $\frac{\sqrt{2}}{4} l_4$	$0,35\ 35\ 53 \ldots l_4$
c'_4	(128) $\frac{\sqrt{6}}{12} l_4$	$0,20\ 41\ 24 \ldots l_4$
d'_4	(129) $\frac{\sqrt{3}}{3} l_4$	$0,57\ 73\ 50 \ldots l_4$
$2\varphi_4$	(130) $\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{sen} \varphi_4 = 0,57\ 73\ 50 \ldots$ $2\varphi_4 = 70^\circ\ 31'\ 43,4''$
k'_4	(131) $\frac{\sqrt{3}}{6} l_4$	$0,28\ 86\ 75 \ldots l_4$
h'_4	(132) $\frac{\sqrt{6}}{3} l_4$	$0,81\ 64\ 97 \ldots l_4$
S'_4	(133) $\sqrt{3}\ l_4^2$	$1,73\ 20\ 51 \ldots l_4^2$
V'_4	(134) $\frac{\sqrt{2}}{12} l_4^3$	$0,11\ 78\ 51 \ldots l_4^2$

Relaciones entre magnitudes

(135) $l_4 : l'_4 = 1 \qquad S_4 : S'_4 = 1 \qquad V_4 : V'_4 = 1$

EUITIS BIBLIOTECA

UNE A4 210 X 297



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 12

Enunciado

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en la lámina 11.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS O (72, 72, 85) mm

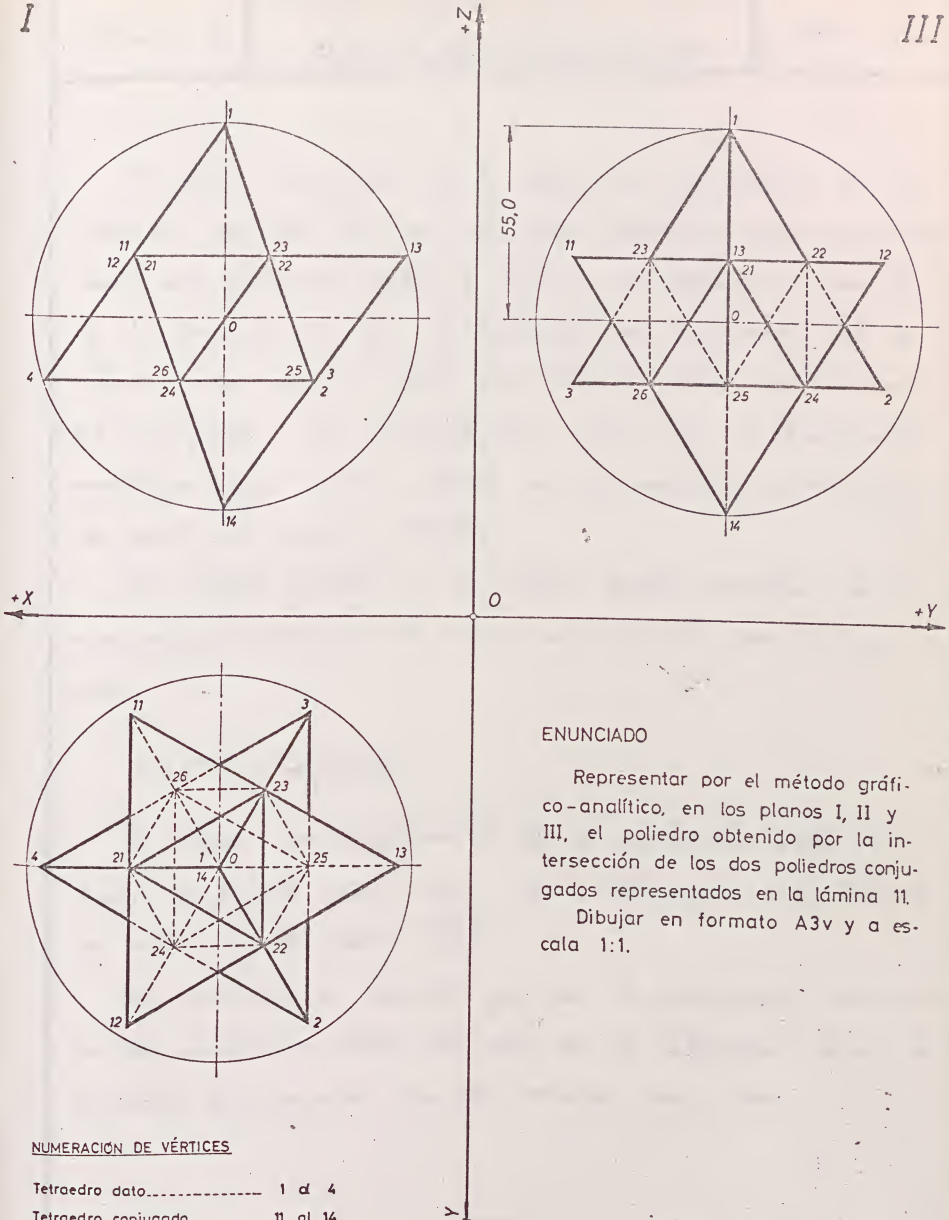
l_4 = 89.8 mm

l'_4 = 89.8 mm

UNE A4 210 X 297

I

III



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en la lámina 11.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dato..... 1 al 4

Tetraedro conjugado..... 11 al 14

Núcleo (octaedro regular)... 21 al 26

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 12
						Curso 19 - 19

II

El poliedro representado en la lámina 12, intersección de un tetraedro regular con su conjugado (simétrico con respecto al centro del tetraedro dado), se obtiene completando el trazado de la lámina 11, con los triángulos que se forman al ser cortado cada ángulo sólido del tetraedro dado por las caras del conjugado. Estas intersecciones serán pues 4 triángulos equiláteros cuyos vértices estarán en los puntos medios de las aristas de ambos poliedros.

El "Proceso gráfico" y el "Proceso gráfico-analítico" de la mencionada lámina 11 sirve igualmente para este ejercicio.

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 8 pirámides rectas (sin base) compuesta cada una de 3 triángulos equiláteros de 44,9 mm. de lado. $\left(\frac{l_4}{2}\right)$.

Este poliedro es cóncavo, ya que la prolongación del plano de cualquier cara de uno de los tetraedros, deja en distintos semiespacios a los vértices del otro.

CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE POLIEDRO

α = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras secantes

El diedro α, formado por una cara cualquiera del tetraedro dado, con la cara secante del conjugado, es suplementario del diedro 2φ del tetraedro regular; su valor será pues:

Fórmula 135,1 $\boxed{\alpha} = 180° - 2\varphi = 180° - 70°\,31'\,43{,}4'' = \boxed{109°\,28'\,16{,}6''}$ [1]

S = Area lateral en función de l_4

La superficie lateral está compuesta por $8 \times 3 = 24$ triángulos equiláteros de lado $l' = \frac{l_4}{2}$; por consiguiente su valor será:

$$\boxed{S} = 24 \times \left(\frac{l'_4}{2}\, h'\right) = 24 \times \left[\frac{l'_4}{2} \times \left(\frac{l'_4}{2}\sqrt{3}\right)\right] = 24 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\, l'^{\,2}_4\right) = 6\sqrt{3}\left(\frac{l_4}{2}\right)^2 =$$

Fórmula 135,2 $\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}\, l_4^{\,2}} = 2{,}59\,80\,76\ldots\, l_4^{\,2}$ [2]

V = Volumen en función de l_4

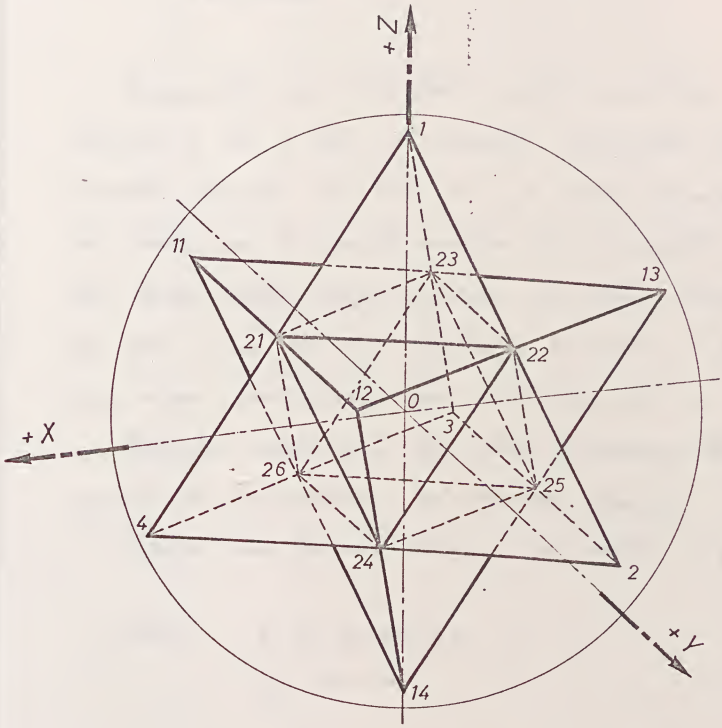
El volumen se compondrá de un núcleo (octaedro regular de lado $\frac{l_4}{2}$) y de ocho tetraedros regulares también de lado $\frac{l_4}{2}$). Así pues tendremos:

Fórmula 135,3

$$\boxed{V} = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{l_4}{2}\right)^3{}^{*} + 8 \times \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(\frac{l_4}{2}\right)^3{}^{**} = \left(\frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{8\sqrt{2}}{96}\right) l_4^3 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{8}\, l_4^3} = 0{,}77\,67\,77\ldots\, l_4^3$$

* Lám. 3, fórmula 28 ** Lám. 1, fórmula 9

UNE A4 210 X 297



Poliëdros regulares convexos conjugados

Lámina 13

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el octaedro conjugado de un exaedro regular de 55,0 m.m de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del exaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son: O (72, 72, 85) m.m.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

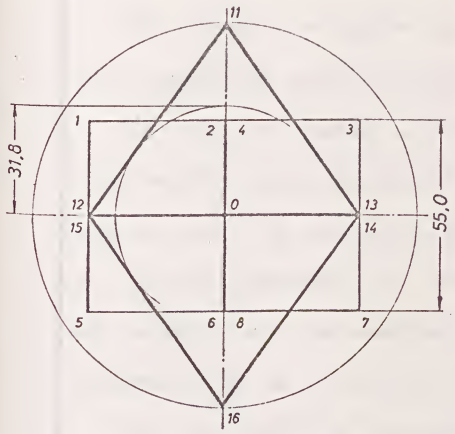
DATOS O (72, 72, 85) mm

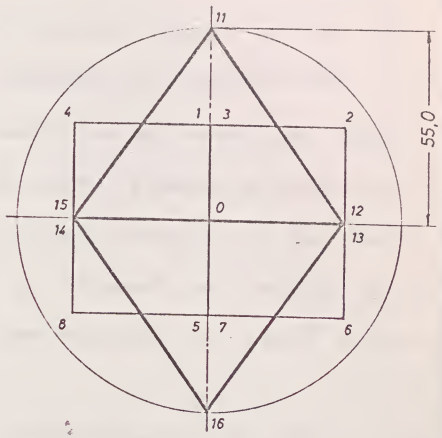
l_6 = 55 mm

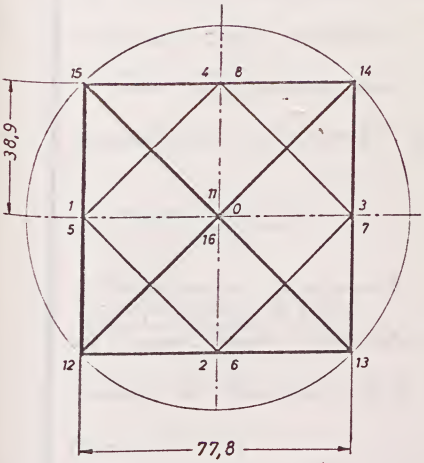
UNE A4 210 X 297

I

III







+Z

+X

O

+Y

+Y

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el octaedro conjugado de un exaedro regular de 55,0 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del exaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro 0 del mismo, cuyas coordenadas son 0 (72, 72, 85) mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobacion al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACION DE VÉRTICES

Exaedro dato..... 1 al 8

Octaedro conjugado..... 11 al 16

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 13 Curso 19 -19

El poliedro conjugado de un exaedro regular es un octaedro regular; los centros de ambos poliedros son coincidentes.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado tiene sus aristas perpendiculares a las del exaedro, y ambas se cortan en sus puntos medios. Por consiguiente, la esfera tangente a las aristas de ambos poliedros, es común, y el punto de contacto de dicha esfera con las aristas es precisamente el punto de intersección de las mismas.

Por otra parte, si proyectamos ortogonalmente los vértices del octaedro conjugado sobre las respectivas caras del exaedro dado, dicha proyección coincide con el centro de cada cara cuadrada del exaedro.

Estas propiedades nos permiten resolver fácilmente la representación propuesta en el enunciado.

PROCESO GRÁFICO

Procederemos primeramente a la representación del exaedro dado (en los planos I, II y III) cuyo lado, conocido, es de 55,0 m m. Para ello utilizaremos el trazado dado en el "Proceso gráfico" de la lámina 2.

Seguidamente, completaremos en el plano II la proyección del octaedro pedido, cuyo contorno es un cuadrado cuyos lados son perpendiculares a las diagonales del cuadrado proyección del exaedro sobre II, pasando dichos lados por los vértices del mismo.

UNE A4 210 X 297

Obtenida la proyección sobre II del octaedro pedido, se deduce fácilmente las proyecciones del mismo sobre I y III (iguales) así como el lado del octaedro y radio de la esfera circunscrita que se obtienen en su verdadera magnitud en II.

Con la numeración adecuada de los vértices y centro de ambos poliedros quedará completada la representación pedida.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas en la lámina 13 se desarrolla basándose en el efectuado en la lámina 3, en función del lado l'_8 del octaedro conjugado.

Previamente se determinará el radio a'_8 de la esfera circunscrita al mismo, teniendo en cuenta la igualdad, en ambos poliedros, del radio de la esfera tangente a las aristas.

El radio b_6 de la esfera tangente a las aristas del exaedro dado, tiene por valor, en función de l_6

$$b_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6 = b'_8 \qquad [1]$$

y por otra parte, el lado l'_8 del octaedro conjugado, en función de b'_8, es

$$l'_8 = 2\, b'_8 = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6 = \sqrt{2}\; l_6 \qquad [2]$$

UNE A4 210 X 297

Conocido l'_8 en función de l_6, se calcularán los siguientes valores (ver tabla figura 3):

$$l'_8 = \sqrt{2}\ l_6 = 1,41\ 42\ 13\ 56\ 24\ldots \times 55,0 = 77,78\ 17\ 46\ldots$$

7

$a'_8 = 0,70\ 71\ 07 \times 77,78\ 17\ 46 = 55,0$ mm

$b'_8 = 0,50\ 00\ 00 \times$ id $= 38,9$ "

$c'_8 = 0,40\ 82\ 48 \times$ id $= 31,8$ "

$d'_8 = 0,57\ 73\ 50 \times$ id. $= 44,9$ "

$2\varphi = 109^\circ\ 28'\ 16''$

$k'_8 = 0,28\ 86\ 75 \times$ id $= 22,5$ "

Obsérvese que el radio a'_8 de la esfera circunscrita al octaedro conjugado, es igual al lado l_6 del exaedro dado, lo cual se demuestra teniendo en cuenta que (ver [2]):

$$a'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ l'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\ b'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\ l_6 = l_6 \qquad [4]$$

FIGURA CORPÓREA

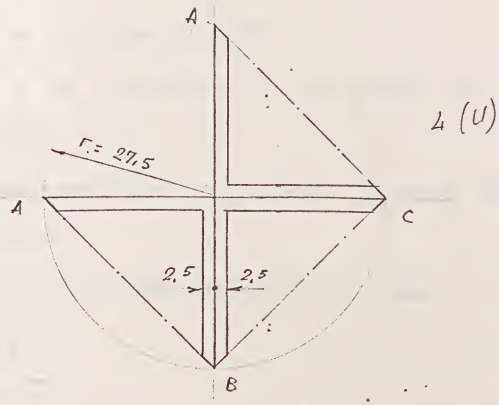
El octaedro conjugado se obtiene por acoplamiento de 8 triángulos equiláteros de 77,8 mm de lado.

El exaedro dado se obtiene (formando) previamente 8 pirámides triangulares (transparentes y sin base), cuyas caras laterales son 3 triángulos rectángulos e isósceles de catetos 27,5 mm (mitad del lado del exaedro); estas pirámides se acoplarán sobre cada una de las ocho caras del conjugado, de forma que sus

UNE A4 210 X 297

vértices están en los puntos medios de las aristas de aquél.

También puede obtenerse el exaedro dado, sustituyendo las caras transparentes de las 4 pirámides triangulares, por las obtenidas según el trazado que se representa a continuación:



Estas cuatro pirámides se acoplarán al octaedro conjugado, colocando sus vértices A, B, C, en los puntos medios de las aristas.

—

UNE A4 210 X 297

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_8 = Lado del octaedro conjugado.

a'_8 = Radio de la esfera circunscrita al mismo

b'_8 = Radio de la esfera tangente a las aristas

c'_8 = Radio de la esfera inscrita

d'_8 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara

$2\varphi_8$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

k'_8 = Apotema del polígono de una cara.

S'_8 = Superficie.

V'_8 = Volumen.

Los valores anteriores del octaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_6 del exaedro dado, ya que el valor conocido de l'_8 en función de l_6 (ver fórmula [2], es

$$l'_8 = \sqrt{2}\ l_6$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas 21 a 28 de la lámina 3, tendremos:

$$a'_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2}\ l_6 = l_6\ ; \qquad b'_8 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}\ l_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ l_6$$

UNE A4 210 X 297

$$c'_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2}\ l_6 = \frac{\sqrt{12}}{6}\ l_6 = \frac{2\sqrt{3}}{6}\ l_6 = \frac{\sqrt{3}}{3}\ l_6 ; \qquad d'_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{2}\ l_6 = \frac{\sqrt{6}}{3}\ l_6$$

$$k'_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{2}\ l_6 = \frac{\sqrt{6}}{6}\ l_6 ; \qquad S'_8 = 2\sqrt{3} \times \left(\sqrt{2}\ l_6\right)^2 = 4\sqrt{3}\ l_6^2$$

$$V'_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \left(\sqrt{2}\ l_6\right)^3 = \frac{4}{3}\ l_6^3 .$$

Son útiles las siguientes relaciones:

a) $$\frac{l_6}{l'_8} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ (ver fórmula [2])

b) $$\frac{S_6}{S'_8} = \frac{6\ l_6^2}{4\sqrt{3}\ l_6^2} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) $$\frac{V_6}{V'_8} = \frac{l_6^3}{\frac{4}{3}\ l_6^3} = \frac{3}{4}$$

En el cuadro sinóptico dado a continuación, resumimos estos resultados.

BIBLIOTECA

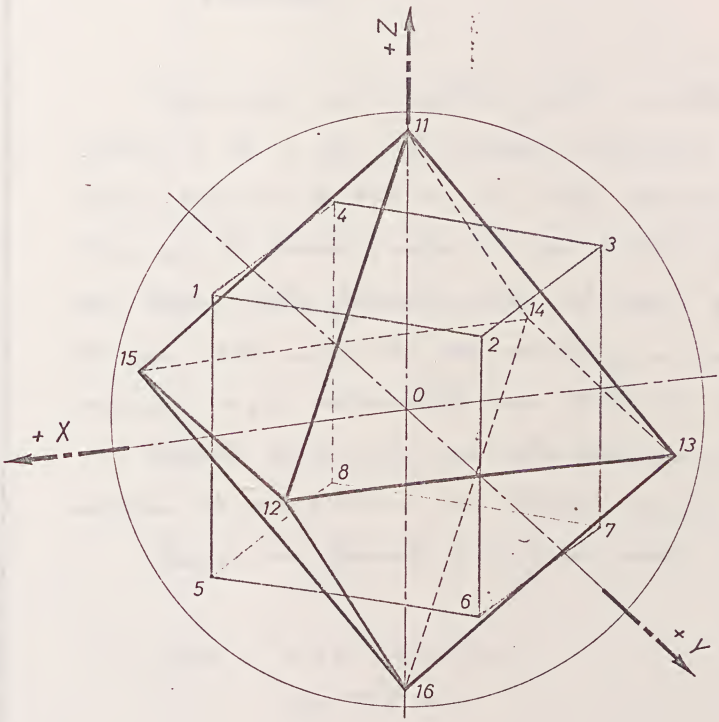
UNE A4 210 X 297

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(136) l'_8	$\sqrt{2}\ l_6$	1, 41 42 14 ... l_6
(137) a'_8	$1\ l_6$	1, 00 00 00 ... l_6
(138) b'_8	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ l_6$	0, 70 71 07 ... l_6
(139) c'_8	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ l_6$	0, 57 73 50 ... l_6
(140) d'_8	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ l_6$	0, 81 64 97 ... l_6
(141) $2\varphi_8$	$\text{sen}\ \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$	sen φ = 0. 81 64 97... 2φ = 109° 28' 16.6"
(142) k'_8	$\frac{\sqrt{6}}{6}\ l_6$	0. 40 82 48 ... l_6
(143) S'_8	$4\sqrt{3}\ l_6^2$	6. 92 82 03 ... l_6
(144) V'_8	$\frac{4}{3}\ l_6^3$	1. 33 33 33 ... l_6
Relaciones entre magnitudes		
$l_6 : l'_8$	(145) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,70 71 07 ...
$S_6 : S'_8$	(146) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	0, 86 60 25 ...
$V_6 : V'_8$	(147) $\frac{3}{4}$	0,75 00 00 ...

$$\frac{S_6}{S'_8} = \sqrt{\frac{V_6}{V'_8}} \quad \text{o} \quad \frac{V_6}{V'_8} = \left(\frac{S_6}{S'_8}\right)^2$$

UNE A4 210 X 297



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 14

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico analítico, en los planos I, II y III, el exaedro conjugado de un octaedro regular de 77,8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del octaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro O del mismo, cuyas coordenadas son: O (72, 72, 85) mm.

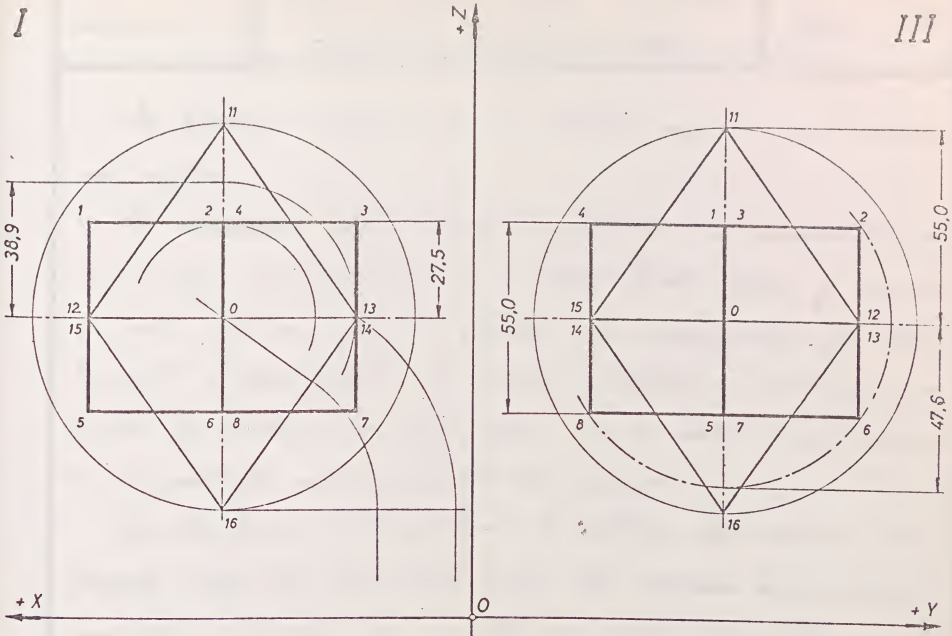
Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

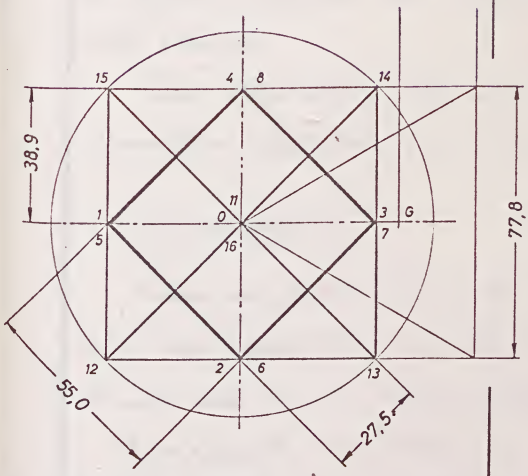
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

l_8 = 77,8 mm

UNE A4 210 X 297





NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Octaedro dato..... 11 al 16

Exaedro conjugado..... 1 al 8

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el exaedro conjugado de un octaedro regular de 77,8 mm de lado, obtenido aquél al trazar por los puntos medios de las aristas del octaedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por cada una de sus aristas y el centro 0 del mismo, cuyas coordenadas son 0 (72, 72, 85)mm.

Calcular previamente sus cotas fundamentales que servirán de comprobación al trazado gráfico.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela de Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedros regulares convexos conjugados					Lámina 14
						Curso 19 -19

II

El poliedro conjugado de un octaedro regular es un exaedro regular.

El conjugado pedido con las condiciones del enunciado tiene sus aristas perpendiculares a las del octaedro dado, y ambas se cortan en sus puntos medios. Por consiguiente, la esfera tangente a las aristas de ambos poliedros, es común, y el punto de contacto de dicha esfera con las aristas es precisamente el punto de intersección de las mismas.

Por otra parte, si proyectamos los vértices del exaedro conjugado sobre las respectivas caras del octaedro dado, dicha proyección coincide con el centro de cada cara triangular del octaedro.

Estas propiedades nos permiten resolver fácilmente la representación propuesta en el enunciado.

PROCESO GRÁFICO

Procedamos previamente a la representación del octaedro dado, cuyo lado, conocido, es de 77,8 mm. Para ello utilizaremos el trazado dado en el "Proceso gráfico" de la lámina 3.

Seguidamente, completemos en el plano II la proyección del exaedro pedido, cuyo contorno es un cuadrado obtenido al unir los puntos medios del contorno del octaedro dado.

Obtenida la proyección sobre II del exaedro pedido, se deduce fácilmente las proyecciones del mismo sobre I y III (iguales), así como el lado del exaedro que se proyecta

UNE A4 210 X 297

en su verdadera magnitud en II,

Con la enumeración adecuada de los vértices y centro de ambos poliedros quedará completada la representación pedida.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas en la lámina 14, se desarrolla basándose en el efectuado en la lámina 2, en función del lado l'_6 del exaedro conjugado.

Paciamente se determinará el radio a'_6 de la esfera circunscrita al mismo, teniendo en cuenta la igualdad, en ambos poliedros, del radio de la esfera tangente a las aristas.

El radio b_8 de la esfera tangente a las aristas del octaedro dado, tiene por valor, en función de l_8

$$b_8 = \frac{1}{2}\, l_8 = b'_6 \qquad [1]$$

y por otra parte, el lado l'_6 del exaedro conjugado, en función de b'_6, es

$$l'_6 = \sqrt{2}\; b'_6 = \sqrt{2} \times \frac{1}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 \qquad [2]$$

Conocido l'_6 en función de l_8, se calcularán los siguientes valores (ver tabla figura 2):

$$l'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = 1,41\,42\,13\,56\,24 \times \frac{77,8}{2} = 55,0$$

siendo la relación $l'_6 : l_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ [3]

UNE A4 210 X 297

y

$$a'_6 = 0.86\ 60\ 25 \times 55,0 = 47,6$$

$$b'_6 = 0.70\ 71\ 07 \times \quad '' \quad = 38,9$$

$$c'_6 = 0.50\ 00\ 00 \times \quad '' \quad = 27,5$$

$$d'_6 = 0.70\ 71\ 07 \times \quad '' \quad = 38,9$$

$$2\varphi = 90^\circ$$

$$k'_6 = 0.50\ 00\ 00 \times \quad '' \quad = 27,5$$

Obsérvese que el lado l'_6 del exaedro conjugado, es igual al radio a_8 de la esfera circunscrita al octaedro dado, lo cual se demuestra teniendo en cuenta que (ver [2]):

$$a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}}\, l'_6 = l'_6 \qquad [4]$$

FIGURA CORPÓREA

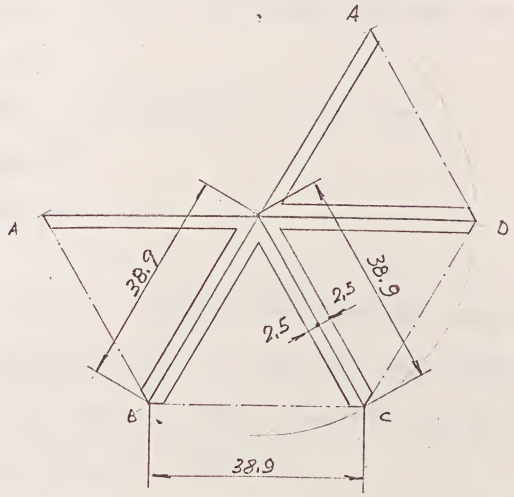
El exaedro conjugado se obtiene por acoplamiento de 6 cuadrados de 55 mm de lado.

El octaedro dado se obtiene formando previamente 6 pirámides triangulares (transparentes y sin base), cuyas caras laterales son 4 triángulos equiláteros de 38,9 mm (mitad del lado del octaedro); estas pirámides se acoplarán sobre cada una de las seis caras del conjugado, de forma que sus vértices estén en los puntos medios de las aristas de aquél.

También puede obtenerse el octaedro dado, sustituyendo las caras transparentes de las 8 pirámides triangulares, por

UNE A4 210 X 297

tas obtenidas según el trazado que se representa a continuación:



Estas ocho pirámides se acoplarán al exaedro conjugado, colocando sus vértices A, B, C, D, en los puntos medios de las aristas.

RESUMEN DEL CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE EJERCICIO

Nomenclatura empleada

l'_6 = Lado del exaedro conjugado.

a'_6 = Radio de la esfera circunscrita al mismo.

b'_6 = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c'_6 = Radio de la esfera inscrita.

UNE A4 210 X 297

d'_6 = Radio de la circunferencia circunscrita al polígono de una cara.

$2\varphi_6$ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas

k'_6 = Apotema del polígono de una cara

S'_6 = Superficie

V'_6 = Volumen.

Los valores anteriores del exaedro conjugado, pueden obtenerse directamente en función del lado l_8 del octaedro dado, ya que el valor conocido de l'_6 en función de l_8 (ver fórmula [2]), es

$$l'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8$$

Sustituyendo este valor en las fórmulas 11 a 19 de la lámina 2, tendremos:

$$a'_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{6}}{4}\, l_8 ; \qquad b'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{1}{2}\, l_8$$

$$c'_6 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{4}\, l_8 ; \qquad d'_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{1}{2}\, l_8$$

$$k'_6 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{4}\, l_8 ; \qquad h'_6 = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8$$

$$S'_6 = 6 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8\right)^2 = \frac{6 \times 2}{4}\, l_8^2 = 3\, l_8^2 \qquad V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, l_8\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}\, l_8^3$$

UNE A4 210 X 297

Son útiles las siguientes relaciones:

a) $\dfrac{l_8}{l'_6} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, (ver fórmula [2])

b) $\dfrac{S_8}{S'_6} = \dfrac{2\sqrt{3}\ l_8^2}{3\ l_8^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

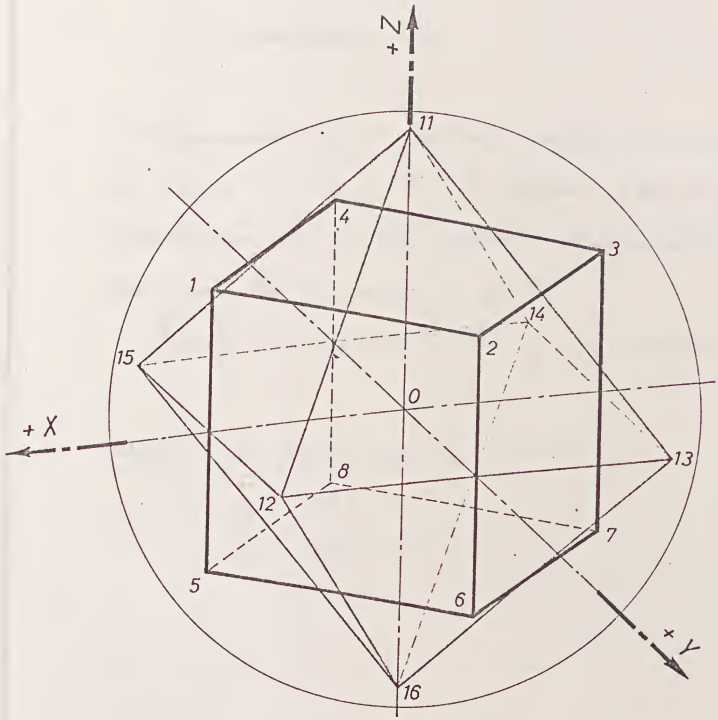
c) $\dfrac{V_8}{V'_6} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{3}\ l_8^3}{\frac{\sqrt{2}}{4}\ l_8^3} = \dfrac{4}{3}$

Resumen de resultados en

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l'_6	(148) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ l_8$	0,70 71 07 .... l_8
a'_6	(149) $\frac{\sqrt{6}}{4}\ l_8$	0,61 23 72 ... l_8
b'_6	(150) $\frac{1}{2}\ l_8$	0,50 00 00 ... l_8
c'_6	(151) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ l_8$	0,35 35 53 ... l_8
d'_6	(152) $\frac{1}{2}\ l_8$	0,50 00 00 ... l_8
$2\varphi_6$	(153) $\operatorname{sen}\varphi_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{sen}\varphi_6 = 0,70\ 71\ 07 \ldots$ $2\varphi_6 = 90°$.
k'_6	(154) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ l_8$	0,35 35 53 ... l_8
h'_6	(155) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ l_8$	0,70 71 07 ... l_8
S'_6	(156) $3\ l_8^2$	3,00 00 00 .. l_8
V'_6	(157) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ l_8^3$	0,35 35 53 ... l_8
Relaciones entre magnitudes		
$l_8 : l'_6$	(158) $\sqrt{2}$	1,41 42 14 ...
$S_8 : S'_6$	(159) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1,15 47 01 ...
$V_8 : V'_6$	(160) $\frac{4}{3}$	1,33 33 33 ...

UNE A4 210 X 297



Poliedros regulares convexos conjugados

Lámina 15

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en las láminas 13 y 14.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS O (72, 72, 85) mm

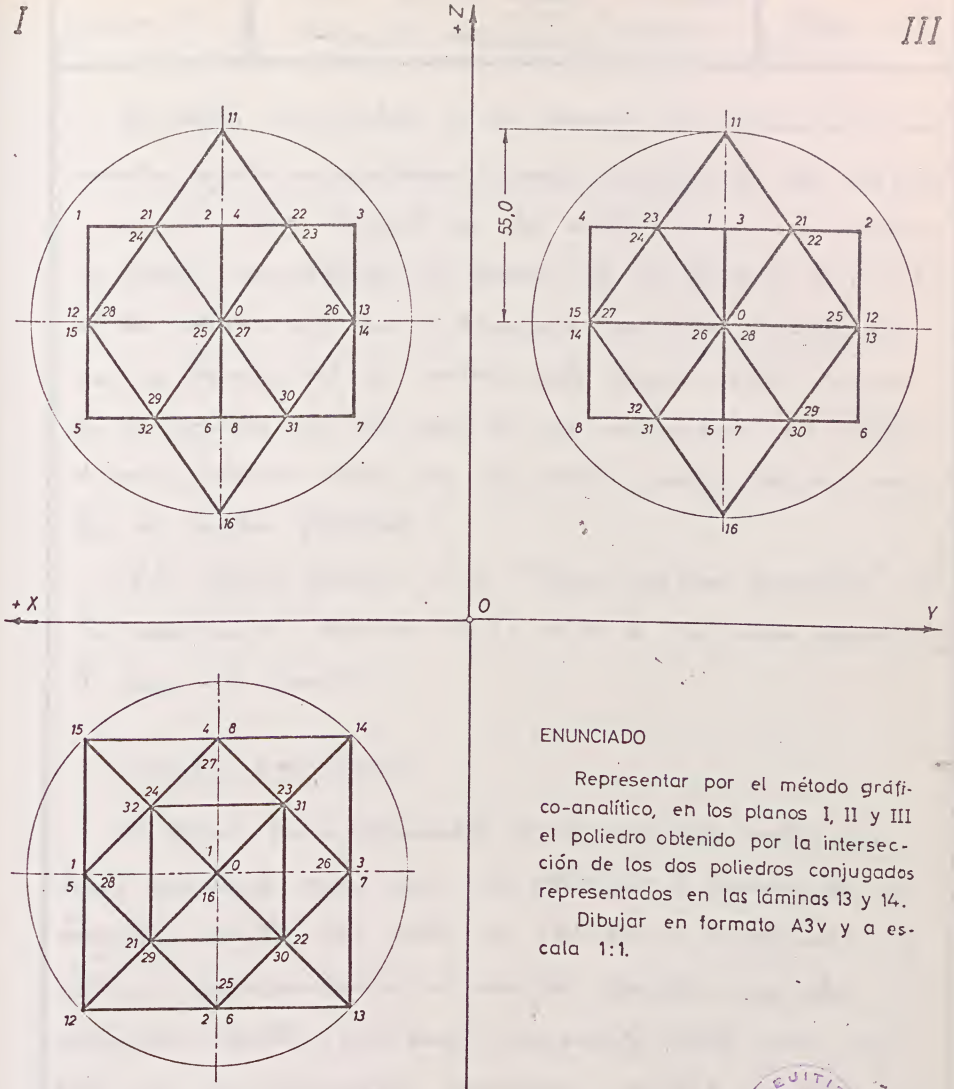
l_6 = 55,0 mm

l'_8 = 77,8 mm

UNE A4 210 X 297

I

III



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III el poliedro obtenido por la intersección de los dos poliedros conjugados representados en las láminas 13 y 14.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro ..... 1 al 8

Octaedro ..... 11 al 16

Núcleo (arquimediano III)... 21 al 32

E.U.I.T.I.S. BIBLIOTECA

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						

II

Escala		
1:1	Poliedros regulares convexos conjugados	Lámina 15
		Curso 19 -19

El poliedro representado en la lámina 15, intersección de un exaedro regular con un octaedro regular, conjugado del anterior, y con la esfera tangente a las aristas comun a ambos, se obtiene completando el trazado de la lámina 13 (o el de la lámina 14), con los triángulos equiláteros y cuadrados que se forman al ser cortado cada ángulo sólido de uno de los poliedros por las caras de su conjugado. Los vértices de estos polígonos estarán en los puntos medios de las aristas de ambos poliedros.

El "Proceso gráfico" y el "Proceso gráfico-analítico" de la mencionada lámina 13 (o el de la 14), sirve igualmente para este ejercicio.

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 8 pirámides rectas (sin base), compuesta cada una de ellas por 3 triángulos rectángulos isósceles de catetos de 27,5 mm e hipotenusa de 38,9 mm correspondientes al exaedro regular, con otras 6 pirámides rectas (sin base), compuesta cada una de ellas por 4 triángulos equiláteros de 38,9 mm de lado, correspondientes estas últimas al octaedro regular.

Este poliedro es cóncavo, ya que la prolongación del plano de cualquier cara de uno de los poliedros, deja en distintos semiespacios a los vértices del otro.

UNE A4 210 X 297

CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE POLIEDRO

El núcleo de este poliedro es el sólido común en la intersección de un exaedro regular con su octaedro regular conjugado con respecto a los puntos medios de sus aristas.

Este sólido común es un poliedro no regular, convexo, compuesto de 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros, de lados de igual longitud en ambos polígonos. Sus ángulos poliedros (12 en total) son todos iguales y en cada uno de ellos concurren dos caras cuadradas y dos triangulares en forma alternada.

Este poliedro entra en el grupo de los llamados "Arquimedianos", cuyo estudio y representación desarrollamos en las láminas 33 a 48. Corresponde al designado por "Arquimediano III" (lámina 35), donde se detalla el cálculo analítico de sus principales magnitudes, algunas de ellas de aplicación al poliedro estudiado en esta lámina.

(continúa en hoja 3)

CÁLCULO DE MAGNITUDES DE ESTE POLIEDRO

α = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras secantes contiguas

El diedro α, formado por una cara del exaedro, con la cara secante del octaedro conjugado, es suplementario del semidiedro 2φ del octaedro regular; su valor será pues

$$\alpha = 180° - \frac{109°\ 28'\ 26.6''}{2} = 125°\ 15'\ 51,7'' \qquad [1]$$

S = Area lateral en función de l_8

La superficie lateral está compuesta: 1)- De 6 pirámides P_4, cuyas caras laterales son 4 triángulos equiláteros de lado igual a $\frac{l_8}{2}$, y: 2)- De 8 pirámides P_3, cuyas caras laterales son 3 triángulos isósceles, rectángulos, de hipotenusa igual a $\frac{l_8}{2}$. Por consiguiente, la superficie S del poliedro, será:

$$S = 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_8}{2}\right)^2 + 8 \times 3 \times \frac{\frac{l_8}{2} \times \frac{l_8}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} l_8^{\ 2} + \frac{3}{2} l_8^{\ 2} =$$

$$= \frac{3+3\sqrt{3}}{2} \cdot l_8^{\ 2} = 4,\ 09\ 80\ 76 \ldots\ l_8^{\ 2} \qquad [2]$$

S = Area lateral en función de l_6

De la relación $\frac{l_8}{l_6} = \sqrt{2}$ * se deduce $l_8 = \sqrt{2}\, l_6$, que

* Lám. 14. fórmula 158

sustituido en [2], nos dá:

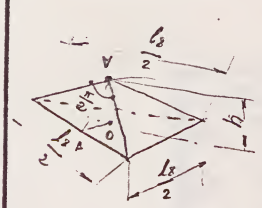
$$S = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\left(l_8^2\right) = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2}\, l_6\right)^2 = \left(3+3\sqrt{3}\right) l_6^2 = \qquad [3]$$

$$= 8,19\,61\,52\ldots\, l_6^2$$

V = Volumen en función de l_8

El volumen se puede calcular como suma de volúmenes de uno de los poliedros regulares y de las pirámides complementarias formadas en sus caras por la intersección del otro.

Considerando como primer sumando el volumen del octaedro, habrá de incrementarse a éste el volumen de 8 pirámides de base triangular (equilátera) y caras laterales formadas por triángulos rectángulos isósceles: de hipotenusa igual a $\frac{l_8}{2}$ (fig. 1).



La altura h de dichas pirámides se deduce del triángulo VAO, en la que

$$\overline{VA} = \frac{1}{4} l_8 \quad y \quad \overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{l_8}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12} l_8$$

y $$\overline{VO} = \sqrt{\overline{VA}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{\frac{1}{16} l_8^2 - \frac{3}{12^2} l_8^2} = \sqrt{\frac{12^2 - 16\times 3}{12^2 \times 16}}\; l_8 = \frac{\sqrt{6}}{12} l_8$$

de donde

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8^3 + 8 \times \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{l_8}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{6}}{12 \times 3}\, l_8\right] = \frac{3\sqrt{2}}{8}\, l_8^3 = \qquad [4]$$

El desarrollo de este cálculo es el siguiente:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\, l_8^3 + 8 \times \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{l_8}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{6}}{12 \times 3}\, l_8\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{3}\sqrt{6}}{2^4 \times 12 \times 3}\right) l_8^3 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2^3\sqrt{18}}{2^4 \times 2^2 \times 3^2}\right) l_8^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2^3 \times 3\sqrt{2}}{2^6 \times 3^2}\right) l_8^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{24}\right) l_8^3 =$$

$$= \frac{8\sqrt{2} + \sqrt{2}}{24}\, l_8^3 = \frac{3\sqrt{2}}{8}\, l_8^3$$

V = Volumen en función de l_6 –

Siendo $l_8 = \sqrt{2}\, l_6$ (ver apartado c)), sustituyendo este valor en [4], tendremos

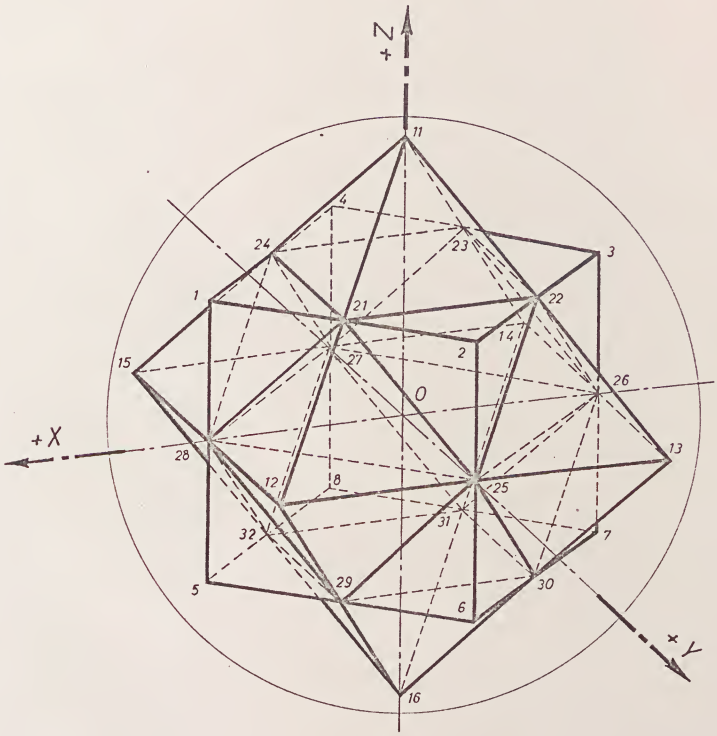
$$V = \frac{3\sqrt{2}}{8} \times \left(\sqrt{2}\, l_6\right)^3 = \frac{3\sqrt{2}}{8} \times 2\sqrt{2}\, l_6^3 = \frac{12}{8}\, l_6^3 = \frac{3}{2}\, l_6^3$$

Resumen de resultados:

CUADRO SINÓPTICO

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
(161) α	$\frac{\pi}{2} - 2\,\text{arc. sen.}\,\frac{\sqrt{6}}{3}$	125° 15' 51,7"
(162) S	$\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\, l_8^2$	4, 09 80 76 ... l_8^2
	$3+3\sqrt{3}\; l_6^2$	8, 19 61 52 ... l_6^2
(163) V	$\frac{3\sqrt{2}}{8}\, l_8^3$	0, 53 03 31 ... l_8^3
	$\frac{3}{2}\, l_6^3$	1, 50 00 00 ... l_6^3

UNE A4 210 X 297



Poliedros regulares convexos conjugados

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
600107500

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERIA TECNICA
INDUSTRIAL DE SEVILLA

ESTANTE.....

TABLA.....

NUMERO 7815